$\boxed{b)}$

Problema 6. (Solución -a-) (Solución -b-)

(a) Sea $\Upsilon = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 20210\}$. Pruebe que si

$$(\alpha + \sqrt{85}\beta) \in \Upsilon \text{ y } (\sqrt{85}\alpha - \beta) \in \Upsilon$$

entonces $\alpha^2 + \beta^2 \in \Upsilon$.

(b) Se colocan al azar cuatro bolas en tres urnas.

1. Describa la distribución de la variable aleatoria

$$X = \text{"número máximo de bolas que hay en alguna urna"}$$

2. Halle $E(X)$.

Propuesta:

$\boxed{a)}$ Utilizando las equivalencias

$$(\alpha + \sqrt{85}\beta) \in \Upsilon \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \alpha + \sqrt{85}\beta = 20210k$$

$$(\sqrt{85}\alpha - \beta) \in \Upsilon \iff \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \sqrt{85}\alpha - \beta = 20210p$$

podemos observar que se cumple:

$$(\alpha + \sqrt{85}\beta)^2 + (\sqrt{85}\alpha - \beta)^2 = (20210k)^2 + (20210p)^2$$

Desarrollando la parte de la izquierda tenemos:

$$(\alpha + \sqrt{85}\beta)^2 + (\sqrt{85}\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 85\beta^2 + 2\sqrt{85}\alpha\beta + 85\alpha^2 + \beta^2 - 2\sqrt{85}\alpha\beta =$$
$$= 86\alpha^2 + 86\beta^2 = 86(\alpha^2 + \beta^2)$$

y desarrollando la parte de la derecha:

$$(20210k)^2 + (20210p)^2 = 20210^2(k^2 + p^2)$$

De esta manera se sucede que:

$$86(\alpha^2 + \beta^2) = 20210^2(k^2 + p^2)$$
$$(\alpha^2 + \beta^2) = 20210 \cdot \frac{20210}{86}(k^2 + p^2) = 20210 \cdot 235(k^2 + p^2)$$

por lo que existe $q \in \mathbb{Z}$ (particularmente $q = 235(k^2 + p^2)$, pero esto es lo de menos) tal que

$$\alpha^2 + \beta^2 = 20210q$$

y así hemos demostrado que $(\alpha^2 + \beta^2) \in \Upsilon$

$\boxed{b)}$ Vamos a entender que el vector

$$(a, b, c)$$