Capítulo 1

Andalucía

Problema 1.

(a) Se tienen $n+1$ cajas idénticas con n bolas cada caja. En la primera caja hay n bolas negras; en la segunda caja hay $n1$ bolas negras y 1 bola blanca; en la tercera hay $n-2$ bolas negras y 2 bolas blancas y así sucesivamente, hasta que, en la última caja, hay n bolas blancas. Se toma una caja al azar y de ella se extraen tres bolas de una vez:

(a-1) Calcule la probabilidad de que las tres bolas sean blancas.

(a-2) Suponiendo que, tras la extracción, las tres bolas son blancas, calcule el número de cajas que tiene que haber para que la probabilidad de que provengan las tres bolas blancas de las dos últimas cajas, sea igual a 2/3.

PROPUESTA:
$\boxed{a)}$ Notese que "extraer tres bolas de una vez" es análogo a "extraer tres bolas sin reemplazamiento", por lo que, por simplicidad en la notación, trabajremos en esta última situación. Denotaremos por C_i al suceso *la bolas se han extraido de la caja i*, y por B_j al suceso *la bola extraida en la extracción j es blanca*. Para ayudar con el proceso de razonamiento podemos elaborar una tabla que resuma la composición de las cajas: En el apartado (a_1) se está pidiendo $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ una vez que se ha elegido una caja

	C_1	C_2	$\cdots$	C_i	$\cdots$	C_n	C_{n+1}
Blancas	0	1	$\cdots$	$i-1$	$\cdots$	$n-1$	n
Negras	n	$n-1$	$\cdots$	$n-i+1$	$\cdots$	1	0

al azar. Debemos notar en este punto que el problema consiste simplemente en aplicar el teorema de la probabilidad total, pues tenemos un espacio muestral particionado de manera que:
• $C_p \cap C_q =$ para todo $p \neq q$ (las bolas no pueden proceder de dos cajas distintas)
• $\sum_i C_i = E$ (las bolas proceden de alguna caja de entre las disponibles)
Además, podemos notar que las tres primeras urnas contienen menos de 3 bolas blancas y que por lo tanto, la probabilidad pedida en caso de que se haya elegido una de estas urnas será 0. Por esta razón, en lo sucesivo, sólo contemplamos los casos para $i \geq 4$.

Según lo dicho,

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \sum_{i=4}^{n+1} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 | C_i) p(C_i) = \sum_{i=4}^{n+1} \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{n(n-1)(n-2)} \frac{1}{n+1}$$

puesto que

- $P(C_i) = \dfrac{1}{n+1}$, puesto que se elige una urna al azar de entre n+1
- $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 | C_i) = \dfrac{i-1}{n} \cdot \dfrac{i-2}{n-1} \cdot \dfrac{i-3}{n-2}$, puesto que la urna i tiene n+1 bolas de la cuales i-1 son blancas, y las extracciones sucesivas son sin reemplazamiento

Renombrando el contador ($k = i - 3$ o, lo que es lo mismo, $i = k + 3$)y simplificando la expresión

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= \frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{n-2} k(k+1)(k+2) = \\ &= \frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{n-2} (k^3 - 3k^2 + 2k) = \\ &= \frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)} \left[\sum_{k=1}^{n-2} k^3 + 3 \sum_{k=1}^{n-2} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-2} k \right] \end{aligned}$$

donde es seguro que sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

muy probable que sepamos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

y posible que conozcamos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

En este caso, podríamos continuar con el cálculo de la probabilidad pedida:

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = &\frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)} \cdot \\ &\cdot \left[\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2} \right)^2 + 3 \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} + 2 \frac{(n-2)(n-1)}{2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)} \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{(n-2)^2(n-1)^2}{4} + \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{2} + (n-2)(n-1) \right] =$$
$$= \frac{1}{(n+1)n} \left[\frac{(n-2)(n-1)}{4} + \frac{2n-3}{2} + 1 \right] =$$
$$= \frac{1}{(n+1)n} \left[\frac{n^2-3n+2}{4} + \frac{4n-6}{4} + \frac{4}{4} \right] =$$
$$= \frac{1}{(n+1)n} \frac{n^2+n}{4} = \frac{n(n+1)}{4(n+1)n} = \frac{1}{4}$$

NOTA: Qué pasa si no conocemos las sumas de los n primeros naturales, de sus cuadrados y de sus cubos.

Podemos plantear un razonamiento recursivo que parte de la igualdad elemental

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = n$$

y que resuelve el problema de calcular la suma de las potencias a-ésimas utilizando que

$$(n+1)^a - 1^a = (n+1)^a - n^a + n^a - (n-1)^a + (n-1)^a + \cdots - 2^a + 2^a - 1^a =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} ((i+1)^a - i^a)$$

de manera que, para el caso que nos atañe, podemos deducir

$$(n+1)^2 - 1^2 = \sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^2 - i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + 2i + 1 - i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (2i+1) =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$

de donde

$$n^2 + 2n = 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$$

De manera análoga,

$$(n+1)^3 - 1^3 = \sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^3 - i^3\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(3i^2 + 3i + 1\right) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 =$$
$$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n^2+n}{2} + n$$

de donde

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n^2 + 5n}{2}$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Y por último

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 1^4 &= \sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^4 - i^4\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1 - i^4\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1\right) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + 4\frac{n^2 + n}{2} + n
\end{aligned}$$

de donde

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 2n^3 + 3n^2 + n + 2n^2 + 2n + n$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

$\boxed{(b)}$ Se está pidiendo la probabilidad

$$P(C_n \cup C_{n+1} | B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

y puesto que las bolas se extran todas de una caja elegida al azar, entonces sucede que $C_n \cap C_{n+1} =$ por lo que

$$P(C_n \cup C_{n+1} | B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(C_n | B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(C_{n+1} | B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

Aplicamos en cada caso el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
P(C_n | B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= \frac{P(C_n)P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 | C_n)}{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)} = \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}\right) : \frac{1}{4} = \\
&= \frac{4(n-3)}{n(n+1)} \\
P(C_{n+1} | B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= \frac{P(C_{n+1})P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 | C_{n+1})}{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)} = \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\frac{n(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2)}\right) : \frac{1}{4} = \\
&= \frac{4}{(n+1)}
\end{aligned}$$

de donde

$$P(C_n \cup C_{n+1}|B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{4(n-3)}{n(n+1)} + \frac{4}{(n+1)} = \frac{8n-12}{n(n+1)}$$

que se nos pide que sea 2/3:

$$\begin{aligned} \frac{8n-12}{n(n+1)} &= \frac{2}{3} \\ 12n - 18 &= n^2 + n \\ n^2 - 11n + 18 &= 0 \end{aligned}$$

con raíces en $n = 2$ y $n = 9$, de las cuales sólo $n = 9$ tiene sentido en nuestro contexto (anteriormente hemos razonado que la cantidad de cajas debe ser al menos 4). Por lo tanto, la solución al problema es que necesitariamos 10 cajas para que la probabilidad de que las 3 bolas blancas procedan de las dos últimas cajas sea 2/3.