Se lanzan n monedas una detrás de otra. En cada lanzamiento, la probabilidad de obtener cara es p. Si se han obtenido k caras, $0 \leq k \leq n$, ¿cuál es la probabilidad de que haya aparecido cara en la primera moneda?

Propuesta:
Razonamiento 1) Podemos observar que el experimento ya se ha realizado y que conocemos el resultado final, en el sentido en el que sabemos que hemos lanzado n monedas de forma consecutiva y que hemos obtenido cara en k de esos lanzamientos. Independientemente de la probabilidad que se tenga de obtener cara, ya sabemos que tenemos k caras en n lanzamientos. Si nos situamos al principio de la partida, esto es, en el primer lanzamiento, la probabilidade que este sea una cara es de

$$\frac{k}{n}$$

(definición clásica de probabilidad, $\frac{casos\ favorables}{casos\ totales}$).
Es cierto que una solución tan sencilla en un principio nos puede hacer desconfiar, por lo que podemos resolver el problema utilizando otras técnicas.

Razonamiento 2) Puesto que la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento es p y asumiendo que el resultado obtenido en un lanzamiento ni es influenciado ni influye al resultado obtenido en otros lanzamientos, entonces podemos concluir que todas las secuencias con k caras y $n-k$ cruces son equiprobables. En particular tendrá probabilidad $p^k(1-p)^{n-k}$. Este tipo de combinación (k caras y $n-k$ cruces) sucede $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ veces (puesto que puede interpretarse como una permutación de n elementos que serán indistinguibles en grupos de k y $n-k$). De estos $\binom{n}{n}$ secuencias distitnas con k caras y $n-k$ cruces, $1 \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}$ tendrán una cara en la primera posición y $k-1$ caras en el resto. La probabilidad de una secuencia concreta de este último tipo es $p \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}$. Sí denotamos:

$p_1 = P($"obtener k caras en n lanzamientos"$)$
$p_2 = P($"obtener cara en el primer lanzamiento y k-1 caras en los n-1 lanzamientos restantes"$)$
tenemos:

$p_1 = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$
$p_2 = 1 \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}p \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}$

La probabilidad buscada será el cociente entre ambas probabilidades:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\right) : \left(1 \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}p \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}\right) = \frac{k}{n}$$

Razonamiento 3) Otra opción para resolver el problema sería la de utilizar aquello que sabemos sobre distribuciones de probabilidad. Si denotamos por X_n la variable aleatoria que cuenta la cantidad de caras obtenidas en n lanzamientos, entonces X_n sigue una distribución binomal $B(n,p)$. La probabilidad pedida por el enunciado sería

$$P(X_1 = 1|X_n = k)$$

que no es más que una probabilidad condicionada. Así,

$$P(X_1 = 1|X_n = k) = \frac{P(X_1 = 1 \cap X_n = k)}{P(X_n = k)} = \frac{P(X_1 = 1 \cap X_{n-1} = k-1)}{P(X = k)} \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{P(X_1 = 1)P(X_{n-1} = k-1)}{P(X = k)} \overset{(2)}{=}$$

donde,

$$P(X_1 = 1) = \binom{1}{1} p^1 (1-p)^0 = p$$

$$P(X_{n-1} = k-1) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

y por lo tanto,

$$\overset{(2)}{=} p \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \right) : \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \right) =$$

$$= p \frac{(n-1)! k! (n-k)!}{(k-1)!(n-k)! n!} \frac{p^{k-1} (1-p)^{n-k}}{p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{k}{n}$$

(1) Notese que el resultado de la moneda en cada lanzamiento es independendiente del resultado obtenido en el lanzamiento anterior.