**Demuestre que todo número complejo $z$ de módulo $1$, con $z \neq 1$ puede escribirse de la forma**

$$\frac{1+\mu i}{1-\mu i}, \mu \in \mathbb{R}$$

**Halle $\mu$ en función del argumento de $z$**

PROPUESTA:
Sean

$$z = a + bi \in \mathbb{C}$$
$$w = \frac{1+\mu i}{1-\mu i}$$

Que $z$ pueda escribirse de la forma $w$ es equivalente a decir que $z = w$, lo que implica que $|z| = |w|$ y $Arg\ z = Arg\ w$. Trabajando la expresión de $w$

$$w = \frac{1+\mu i}{1-\mu i} = \frac{(1+\mu i)^2}{(1-\mu i)(1+\mu i)} = \frac{1+2\mu i-\mu^2}{1+\mu^2}$$

obtenemos que

$$Re\ w = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$$
$$Im\ w = \frac{2\mu}{1+\mu^2}$$

y que por lo tanto,

$$(Re\ w))^2 + (Im\ w)^2 = \left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{2\mu}{1+\mu^2}\right)^2 = \frac{(1-\mu^2)^2+4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} =$$
$$= \frac{(1-2\mu^2+\mu^4)+4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} = \frac{1+2\mu^2+\mu^4}{(1+\mu^2)^2} = 1$$

lo que nos lleva a que $|w| = 1$ y que necesariamente $|z| = 1$, dando sentido a la condición impuesta en el enunciado del ejercicio.
Que $z = w$ sería equivalente a decir que se cumplen las igualdades:

$$a = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$$
$$b = \frac{2\mu}{1+\mu^2}$$

de donde obtenemos la relación

$$\frac{a}{b} = \frac{1-\mu^2}{2\mu}$$

para aquellos casos en que $b \neq 0$, cosa que se cumple por la imposición de que $|z| = 1$ al mismo tiempo que $z \neq 1$ (notese además que $b \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 0$), y que implica necesariamente que

$$b\mu^2 + 2a\mu - b = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado en $\mu$ tenemos

$$\mu = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2+4b^2}}{2b} = \frac{-2a \pm 2|z|}{2b}$$

Por lo se cumple que

$$\mu = \frac{-a \pm 1}{b}$$

De esta manera se demuestra que efectivamente, bajo las condiciones impuestas, $z = w$, es decir, todo número complejo $z$ normalizado distinto de la unidad puede escribirse como el cociente del enunciado, simplemente determinando el valor de $\mu$ como

$$\mu = \frac{-Re(z) \pm 1}{Im(z)}$$

Se nos pide expresar $\mu$ en función del argumento de $z$, pero esto es sencillo si expresamos $z$ en forma trigonométrica $z = \cos\theta + i\sin\theta$ (siendo $\theta = Arg(z)$ y puesto que $|z| = 1$). De esta manera obtenemos que:

$$\mu = \frac{-\cos\theta \pm 1}{\sin\theta}$$