Se colocan al azar cuatro bolas en tres urnas.

a) Describa la distribución de la variable aleatoria
   X =número máximo de bolas que hay en alguna urna

b) Determine $E(X)$

PROPUESTA:

a)Vamos a entender que el vector

$$(a, b, c)$$

nos está diciendo que la urna 1 tiene a bolas, la urna 2 tiene b bolas y la urna 3 tiene c bolas. Vamos a entender que la secuencia 1123 nos está diciendo que la primera bola ha sido introducida en la urna 1, la segunda bola en la urna 1, la tercera bola en la urna 2 y la cuarta bola en la urna 3. De esta manera es equivalente decir

$$(4, 0, 0)$$

que 1111, por lo que usaremos lo que se considere más sencillo en cada momento.

Empezamos estudiando cuales son los distintos valores que puede tomar la variable X:

- (4,0,0) daría un valor $X = 4$
- (3,1,0) daría un valor $X = 3$
- (2,2,0) y (2,1,1) daría un valor $X = 2$

Podemos observar que no esposible que $X \leq 1$. Por lo tanto, el soporte de la variable que estamos estudiando es $S_X = \{2, 3, 4\}$. Se trata ahora de estudiar con qué frecuencia aparece cada uno de los casos para poder determinar así las probabilidades.

$X = 4$ se dará en los casos 1111, 2222 o 3333, por lo que tenemos 3 situaciones con probabilidad $1/3^4$ (la bola 1 va a la urna 1 con probabilidad 1/3 y así sucesivamente).

$X = 3$ cuando 1112, 1113, (2 casos análogos) estando el 2 o el 3 en cualquier posición de la secuencia (4 situaciones análogas) y además, reproduciendose la situación para los casos análogos a 2221 o 3331 (3 casos en total $111x$ $222x$ $333x$). Por esta razón, $X = 3$ en $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ ocasiones.

$X = 2$ cuando $(2, 2, 0)$ o $(2, 1, 1)$. El caso $(2, 2, 0)$ es análogo a las situaciones del tipo 1122 que habrá $4!/(2!2!) = 6$ para 2 urnas elegidas de entre 3, es decir $\binom{3}{2} = 3$, por lo que se dá en $6 \cdot 3 = 18$ ocasiones. El caso $(2, 1, 1)$ es análogo a la situación del tipo 1123 que bien podría ser 1132 (2 casos). Esto sucederá para el caso en que la urna 1 tiene las dos bolas o para los casos en que las tienen la urna 2 o la urna 3 (3 casos en total $11xy$, $22xy$ $33xy$). Hay $4!/2! = 12$ ordenaciones del tipo $11xy$ de manera que en total tenemos $12 \cdot 3 = 36$ casos analogos a $(2, 1, 1)$.

De esta manera, la distribución de X definida por su función puntual de probabilidad queda:

$$P(X = x) = \begin{cases} 54/81 = 18/27 & si \quad x = 2 \\ 24/81 = 8/27 & si \quad x = 3 \\ 3/81 = 1/27 & si \quad x = 4 \end{cases}$$

b)cuya esperanza es

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} xP(X = x) = 2\frac{18}{27} + 3\frac{8}{27} + 4\frac{1}{27} = \frac{64}{27}$$