Capítulo 6

Aplicaciones lineales

6.1. Definición.

Sean U y V dos K-espacios vectoriales. Una aplicación $f : U \to V$ se dice que es una **aplicación lineal**, si satisface:

1. $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$, con $u_1, u_2 \in U$.

2. $f(k \cdot u) = k \cdot f(u)$, con $u \in U$ y $k \in K$.

Estas dos condiciones, nos vienen a decir que: una aplicación, será lineal, si la aplicación "conmuta" con la suma y el producto (que recordemos que son las operaciones que definen un espacio vectorial). Recordemos que la propiedad de una operación de ser conmutativa, nos viene a decir, que no importa el orden en que se opera. El producto es conmutativo porque no influye en el resultado el orden en que multipliquemos dos números cualquiera x e y: $xy = yx$. Si trasladamos esto al concepto de aplicación lineal, lo que obtenemos es que una aplicación es lineal cuando obtenemos el mismo resultado sin importar el orden entre .evaluarz .operar"; es decir, resulta lo mismo si primero sumamos dos vectores y luego los evaluamos por medio de la aplicación lineal, que si primero evaluamos cada vector y sumamos sus imágenes.

Estas dos condiciones se pueden resumir en una sola:

Sean U y V dos K-espacios vectoriales. Una aplicación $f : U \to V$ se dice que es una aplicación lineal, si satisface:

$$f(k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2) = k_1 \cdot f(u_1) + k_2 \cdot f(u_2), \text{ con } u_1, u_2 \in U \text{ y } k_1, k_2 \in K.$$

Esta ”condición resumen” indica que las aplicaciones lineales conservan la linealidad, que es la condición esencial de un espacio vectorial. Podríamos decir por lo tanto, que una aplicación lineal conserva la estructura de subespacio vectorial.

Propiedades importantes:

Sean U y V dos K-espacios vectoriales. Si $f : U \to V$ es una aplicación lineal, entonces:

- $f(0) = 0$.
- $f(-u) = -f(u)$.
- $f(k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 + ... + k_n \cdot u_n) = k_1 \cdot f(u_1) + k_2 \cdot f(u_2) + ... + k_2 \cdot f(u_2)$, con $u_1, u_2, ..., u_n \in U$ y $k_1, k_2, ..., k_n \in K$.

La propiedad 1 es de gran ayuda para cuando estamos comprobando si una aplicación es o no es lineal. Es importante resaltar que es una condición necesaria (no suficiente), por lo que una aplicación que no cumpla la condición no puede ser aplicación lineal, pero una aplicación que si la cumpla, no necesariamente será lineal. Por lo tanto, la ventaja principal será que nos va a permitir descartar de forma rápida las aplicaciones que no cumplan con esta condición.

Ejemplo: aplicaciones lineales por definición.

Estudie cuales de las siguientes son aplicaciones lineales,

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(v) = k \cdot v$, con k un numero real fijo.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y, z) = (x, 1, z)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 0, 0)$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, z)$.
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y, z) = (x - y, x + z)$.

6.1.1. Expresión analítica.

La expresión analítica de una aplicación lineal $f : U \to V$, entre los K-espacios vectoriales U y V, es aquella que nos describe los vectores del espacio de llegada como la imagen de un vector en el espacio de salida, es decir, es d ela forma $f(u) = v$, siendo $u \in U$ y $v \in V$.

Nota: Las aplicaciones descritas en el ejemplo anterior, están expresadas en forma analítica.

6.1.2. Expresión matricial.

Si tenemos una aplicación lineal $f : U \to V$, entre los K-espacios vectoriales U y V, con bases $\beta_U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, entonces sucede que $f(u_j)$ es combinación lineal de elementos de la base β_V, es decir, que para todo $u_i \in \beta_U$ existen $a_{ij} \in K$ de forma que

$$f(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + ...a_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i,$$

lo que implica que para cualquier vector $u \in V$, que a su vez se podrá escribir de la forma

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + ...x_nu_n = \sum_{j=1}^{n} x_ju_j,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} f(u) = f(\sum_{j=1}^{n} x_ju_j) = \sum_{j=1}^{n}[x_jf(u_j)] = \sum_{j=1}^{n}[x_j\sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i] = \\ = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_ja_{ij})v_i = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} x_ja_{ij})v_i, \end{aligned}$$

de donde se deduce que cuando $u_{\beta_U} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, entonces

$$f(u)_{\beta_V} = (\sum_{j=1}^{n} x_ja_{1j}, \sum_{j=1}^{n} x_ja_{2j}, ..., \sum_{j=1}^{n} x_ja_{mj}).$$

Simplificando notación y llamando $f(u)_{\beta_V} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, tenemos que

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_ja_{ij} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n,$$

que no es más que un sistema de ecuaciones lineales con n incognitas y m ecuaciones, que podemos expresar en forma matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A la matriz,

$$M_{\beta_V \beta_U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la llamamos matriz de la aplicación lineal respecto de las bases β_U y β_V. A la expresión $f(u)_{\beta_V} = M_{\beta_V \beta_U} u_{\beta_U}$ la llamamos expresión matricial de la aplicación lineal.

Ejemplo: expresión matricial y analítica de una aplicación lineal.

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:

$$f(1,1,1,1) = (0,0,1), \quad f(1,0,1,0) = (1,1,-1)$$

$$f(1,1,1,0) = (0,0,-1), \quad f(-1,-2,0,0) = (1,1,1),$$

determinar la matriz asociada a f y explicitar las bases de referencia.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z) = (x - y + z, x + 2y - 2z),$$

determinar la matriz asociada a f y explicitar las bases de referencia.

3. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

determinar la expresión analítica de f.

6.2. Imagen y antiimagen.

Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal y $u \in U$. Al vector $v = f(u) \in V$ lo llamamos imagen del vector u. Además, el vector $u \in U$, es la antiimagen del vector $v \in V$, y se denota por $u = f^{-1}(v)$.

Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal y E un subespacio vectorial de U y F un subespacio vectorial de V. Llamamos imagen del subespacio E al subespacio

$$f(E) = \{f(u)|u \in E\}.$$

Llamamos antiimagen del subespacio F, al subespacio

$$f^{-1}(F) = \{u \in U|f(u) \in F\}.$$

Propiedades importantes:

- Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal y E un subespacio vectorial de U, entonces $f(E)$ es subespacio vectorial de V.
- Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal y F un subespacio vectorial de V, entonces $f^{-1}(F)$ es subespacio vecotiral de U.
- Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal, si $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ es un sistema generador de U, entonces $\{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_k)\}$ es un sistema generador de V.
- Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal y E un subespacio vectorial de U y F un subespacio vectorial de V. Si $E =< u_1, u_2, ..., u_k >$ entonces $F =< f(u_1), f(u_2), ..., f(u_k) >$.

Esta propiedad nos permitirá encontrar la imagen de cualquier subespacio vectorial del espacio de salida, como el subespacio generado por las imágenes de un sistema generador de dicho subespacio.

Ejemplo: imagen / antiimagen de vectores y subespacios.
Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ las aplicaciones lineales definidas por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, z);$$

$$g(x, y, z) = (x - y, x + z),$$

y sean los subespacios vectoriales $V =< (1, -1, 0), (1, 1, 1) >$ y $W = \{(3\lambda, 2\lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Calcule:

1. $f(V)$ y $g(V)$.
2. $f^{-1}(0, 0, 0)$ y $g^{-1}(2, 2, 1)$.
3. $f^{-1}(W)$.

6.3. Nucleo e Imagen.

Se define el **núcleo** de una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$, y se denota por $Nuc(f)$ o $Ker(f)$, como el subespacio vectorial formado por todos los vectores del espacio de salida cuya imagen es el vector trivial del espacio de llegada,

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Se define la **imagen** de una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$, y se denota por $Im(f)$, como el subespacio vectorial formado por todos los vectores del espacio de llegada para los que existe una antiimagen,

$$Im(f) = \{v \in V | \ existeu \in Utalquef(u) = v\}.$$

Nota:

- $Kerf$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial U.
- Imf es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

6.3.1. Ecuaciones del núcleo y la imagen.

El núcleo de una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ es, por definición, el conjunto de vecotres $u \in U$ tales que $f(u) = 0$, por lo tanto, sus ecuaciones pueden encontrarse resolviendo el sistema homogéneo.

La imagen de una aplicación lineal $f : U \to V$ es, por definición, el conjunto de vecotres $v \in V$ para los que existe $u \in U$ para el que $f(u) = v$, por lo que se trata de encontrar condiciones sobre v para que el sistema propuesto sea compatible.

6.3.2. Dimensión y base del núcleo y la imagen.

El núcleo y la imagen de una aplicación lineal $f : U \to V$ son subespacios vectoriales de U y V respectivamente, y por lo tanto, el cálculo de las dimensión o la base de cualquiera de ellos se hace de manera análoga a cómo se hace para cualquies subespacio vectorial, una vez que tenemos el núcleo y la imagen descritos a partir de sus ecuaciones.

Ejemplo: núcleo e imagen de una aplicación lineal.
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:

$$f(1,1,1,1) = (0,0,1), \quad f(1,0,1,0) = (1,1,-1)$$

$$f(1,1,1,0) = (0,0,-1), \quad f(-1,-2,0,0) = (1,1,1),$$

determinar unas ecuaciones del núcleo y la imagen, una base y su dimensión.

6.4. Algunas definiciones básicas.

6.4.1. Inyectivo, sobreyectivo, biyectivo.

Una aplicación lineal $f : U \to V$ es **inyectiva** si y sólo si $Kerf = 0$.

Una aplicación lineal $f : U \to V$ es **sobreyectiva** (o suprayectiva) si y sólo si $Imf = V$.

Una aplicación lineal $f : U \to V$ es **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

Dada una aplicación lineal $f : U \to V$, se llama rango de f, $rang(f)$, a la dimensión de Imf, es decir,

$$rang(f) = dim(Imf).$$

Propiedades importantes:

- Dada una aplicación lineal $f : U \to V$, si U es de dimensión finita, entonces $Kerf$ e Imf son también de dimensión finita y se cumple que

$$dimU = dim(Kerf) + dim(Imf).$$

- Dada una aplicación lineal $f : U \to V$ con $dim(U) = dim(V)$, ambas dimensiones finitas, entonces f es inyectiva si y sólo si f es sobreyectiva si y sólo si f es biyectiva.

6.4.2. Isomorfismo, endomorfismo, automorfismo.

Una aplicación lineal $f : U \to V$ es un **isomormismo** de espacios vectoriales si es una aplicación biyectiva.

Una aplicación lineal $f : U \to U$ es un **endomorfismo** de un espacio vectorial U.

Un **automorfismo** es un endomorfismo biyectivo.

Dos espacios vectoriales se dicen que son isomorfos, y se denota por $U \cong V$, si existe un isomorfismo entre ellos.

Sean U y V dos L-espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $U \cong V$ si y sólo sí $dim(U) = dim(V)$.

6.4.3. Operaciones.

6.5. Cambio de base.

Análogo a lo expuesto en el tema 4 sobre la matriz de cambio de base en espacios vectoriales.

Ejemplo: otras bases.
Sea $f:\mathbb{R}^4\rightarrow\mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:

$$f(1,1,1,1)=(0,0,1),\quad f(1,0,1,0)=(1,1,-1)$$

$$f(1,1,1,0)=(0,0,-1),\quad f(-1,-2,0,0)=(1,1,1),$$

determinar,

1. la matriz de f respecto a las bases canónicas.
2. la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base $\beta=\{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

6.6. El espacio de las aplicaciones lineales.

Dados dos K-espacios vectoriales U y V, denotamos por $\mathcal{L}(U,V)$ al conjunto formado por todas las aplicaciones lineales de U a V, esto es,

$$\mathcal{L}(U,V)=\{f:U\rightarrow V|f\ lineal\}.$$

Además, definimos las operaciones,

- Suma: dadas $f,g\in\mathcal{L}(U,V)$, se define la suma $f+g:U\rightarrow V$ como la aplicación $(f+g)(u)=f(u)+g(u)$
- Producto: dada $f\in\mathcal{L}(U,V)$ y $k\in K$, se define el producto $kf:U\rightarrow V$ como la aplicación $(kf)(u)=kf(u)$

Con estas dos operaciones, $\mathcal{L}(U,V)$ tiene estructura de K-espacio vectorial, que denominamos como espacio vectorial de las aplicaciones lineales de U y V.

Si tenemos dos K-espacios vecotirales U y V de dimensiones n y m respectivamente, entonces $\mathcal{L}(U,V)$ es isomorfo a $M_{nm}(K)$, lo que implica que

$$dim(\mathcal{L}(U,V))=dim(U)dim(V).$$

6.6.1. Espacio dual.

Se llama espacio dual de un K-espacio vectorial V, y se denotará por V^*, al espacio vectorial $V^*=\mathcal{L}(V,K)$. A os elementos de V^* se les llama formas lineales sobre V. V^* es isomorfo a V.

6.7. Teorema de Isomorfía.

Recordemos (Tema 4): Sean V un K-espacio vectorial y U un subespacio vectorial de V. Se dice que $v_1, v_2 \in V$ están relacionados módulo U si $v_2 - v_1 \in U$. Entonces V/U es un K-espacio vectorial con las operaciones $+$ y $\cdot$,

$$[u] + [v] = [u + v]$$

$$k[u] = [ku]$$

y lo llamamos espacio vectorial cociente de V por U.

La aplicación lineal $\pi : V \to V/U$, con $\pi(v) = [v]$ (las clases de equivalencia de v), se llama proyección canónica y tiene las propiedades de ser suprayectiva y $Kerf = U$.

Teorema de Isomorfía. Si $f : U \to V$ es lineal, entonces

$$Imf \cong U/Ker(f).$$

Descomposición canónica de una aplicación lineal. Si $f : U \to V$ es lineal, entonces se puede descomponer de la forma

$$f = j \circ g \circ \pi,$$

donde $\pi : U \to U/Kerf$ es sobreyectiva, $g : U/Kerf \to Imf$ es isomorfismo, y $j : Imf \to V$ es inyectiva.

6.8. Ejercicios resueltos.

.

Ejercicio 01:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, x + 2y - 3z, y - z, x - y).$$

1. Calcule una base y unas ecuaciones de la imagen y del núcleo de f.

2. Calcule una base de $f(U)$ donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por la ecuación $x + y - 3z = 0$.

3. Calcule unas ecuaciones de $f^{-1}(W)$ donde W es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ $W = \{(x, y, z, t) | x + y + z - t = 0, x + 2y - z = 0\}$.

Ejercicio 02:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (x + y, z, -z).$$

1. Calcule una base y unas ecuaciones de la imagen y del núcleo de f.
2. Calcule la descomposición canónica de f.

Ejercicio 03:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal. Se sabe que

$$(1, 1, 3) \in Kerf$$

y que

$$f(1, 0, 1) = (1, 2, 3, 4); f(1, 1, b) = (1, 0, 1, 0); f(2, 1, 1 + b) = (b, b, 2b, 2b)$$

para cierto $b \in \mathbb{R}$. Determine el balor de b y calcule la matriz de f en las bases canónicas y una base de Imf.

Ejercicio 04:
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Se sabe que

$$(3, 1) \in Kerf,$$

$$(1, -5, 2) \in Imf,$$

y que la segunda coordenada de $f(-1, 2)$ es 10. Determine la matriz de f en las bases canónicas.

Ejercicio 05:
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Calcule la matriz en las bases canónicas de f, sabiendo que se verifica que

$$f(1,0,0,0) = (1,0,0), f(0,1,0,0) = (0,1,0),$$

y que además

$$Kerf = \{(x,y,z,t)|x-2y+z+t=0, x+y-2z+t=0, 2x-y-z+2t=0\}.$$

Ejercicio 06:
Decida si existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ con

$$Kerf =< (0,1,2,3,4),(4,3,2,1,0),(1,1,1,1,1) >,$$

$$Imf =< (1,0,-1,0),(1,1,1,2),(1,1,1,1),(1,2,3,4) > .$$

Ejercicio 07:
Discuta si la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con

$$f(x,y,z) = (2x+y+4z, x+y+2z, x+y+3z)$$

es biyectiva, y en caso afirmativo, encuentre su inversa.

Ejercicio 08:
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

y sean

$$\beta_1 = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),(1,1,1,1)\},$$

$$\beta_2 = \{(1,1),(0,2)\},$$

bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

1. Calcule $M_{\beta_1\beta_2}(f)$.
2. Calcular una base de $Kerf$ y Imf en las bases canónicas.
3. Calcular una base de $Kerf$ y Imf en las bases β_1 y β_2.

Ejercicio 09:
Se define la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[x]$, donde $\mathbb{R}_1[x]$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1 con coeficientes reales, mediante

$$f(1,0) = 1 - x, f(0,1) = 1.$$

Calcula el núcleo y la imagen de f.

Ejercicio 10:
Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y

$$\beta = \{(1,1,1)_{\mathcal{C}}, (1,1,0)_{\mathcal{C}}, (0,1,1)_{\mathcal{C}}\}$$

una base de V, siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de V. La matriz asociada a f viene dada por,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ a & 0 & b \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $f(1,-3,0)_\beta = (-7,-3,-10 =_\beta$.

1. Demuestre que $a = 1$ y $b = 1$.

2. Calcule $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)$.

3. Calcule $M_{\beta\beta}(f)$.

4. Determine las ecuaciones cartesianas, la dimensión y una base de $Kerf$ tomando como sistema de referencia la base $\mathcal{C}$.

5. ¿Puede la dimensión de $Kerf$ ser distinta si considermaos la base $\mathcal{C}$ o la base β?.

6. Determine las ecuaciones cartesianas, la dimensión y una base de Imf tomando como sistema de referencia la base β.

Ejercicio 11:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + ay + z, x + y + az).$$

1. Hallar el valor de a para el que f no es inyectiva, y para dicho valor, determinar una base de $Ker f$ y otra de $Im f$.

2. Para $a = 0$, hallar la matriz $M_{\mathcal{CC}}(f)$ donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

3. Para $a = 0$, hallar la matriz $M_{\beta\beta}(f)$ donde

$$\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

   es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 12:
Sean las bases $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, de $\mathbb{R}^3$, y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, de $\mathbb{R}^4$, y sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definida por

$$f(u_1) = 2w_1 - w_2 - 3w_3,$$

$$f(u_2) = -w_1 + w_2 - w_3 + w_4,$$

$$f(u_3) = w_2 + w_4.$$

Calcular la matriz asociada a f y las ecuaciones, una base y la dimensión del núcleo y la imagen de f.

Ejercicio 13:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ para que la matriz de f respecto a ellas sea

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$