

2. Sean a y b dos números reales positivos.

a) Demostrar que si $a < b < e$ entonces $a^b < b^a$.

b) Demostrar que si $e < a < b$ entonces $a^b > b^a$.

$$a, b \in \mathbb{R}^{++} \quad \mathbb{R}^{++} = (0, +\infty)$$

a) $a^b < b^a \Leftrightarrow \ln a^b < \ln b^a \Leftrightarrow b \ln a < a \ln b$

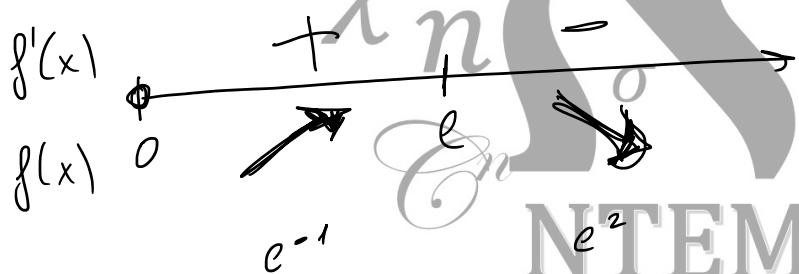
$\Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$

$0 < a < b < e \Rightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\cancel{1x} - \ln x \cdot 1}{\cancel{x^2}} \sum \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$



NTTEM
notodoesmatematicas.com

f es creciente en $(0, e)$ \Rightarrow
 $\forall a, b \in (0, e) \quad | \quad \boxed{a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}}$

b) f es decreciente en $(e, +\infty)$ \Rightarrow
 $\forall a, b \in (e, +\infty) \quad | \quad \boxed{a < b \Rightarrow f(a) > f(b) \Rightarrow \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \Rightarrow a^b > b^a}$

