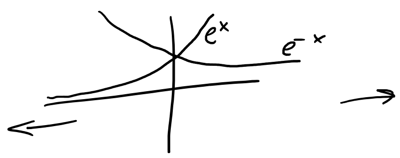
PROBLEMA Nº5

Consideremos las funciones $\underline{f(x) = xe^{-x}}$ y $g(x) = 2 - x\int_0^x e^{-t^2}\,dt$



a) Estudiar y representar gráficamente la función f (5 puntos).

b) Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)+2-x}{xLn(1-x)}$ (5 puntos)

a) * Dominio ; $\text{Dom } f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Continuidad: $C(f) = \mathbb{R}$

* Simetría: $\begin{cases} \text{PAR} & f(x) = f(-x) \\ \text{IMPAR} & -f(x) = f(x) \end{cases}$

$f(-x) = -x e^{x} \neq f(x)$ No PAR

$-f(x) = -x e^{-x} \neq f(-x)$ No IMPAR

* Corte con los ejes:

→ Eje OX $(y=0)$

$x e^{-x} = 0$ → $x = 0$ → $(0,0)$; → $\cancel{e^{-x} = 0}$

→ Eje OY $(x=0)$ → $(0,0)$

Regiones: $-$ | 0 | $+$

Negativa $(-\infty, 0)$

Positiva : $(0, +\infty)$

* Asíntotas:

→ Vertical: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

No tiene

→ Horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \neq \infty$.

$e^x >> x$

L'Hopital

$\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

$\lim_{x\to-\infty} x e^{-x} = -\infty$

A. horizontal $y = 0^+$ si $x \to +\infty$

→ Oblicua: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq \infty \ \wedge \ \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \neq \infty$

$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x} e^{-x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x}$ $\xrightarrow{+\infty} 0^+$; $\xrightarrow{-\infty} +\infty$

$\underline{y = 0^+}$

$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

* Monotonía

$f'(x) = 1\cdot e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

		1	
f'	$+$		$-$
f	↗		↘

Crece: $(-\infty, 1)$

Decrece: $(1, +\infty)$

Máximo $(1, e^{-1})$

$$\begin{array}{l} f' \\ f \end{array} \quad \xrightarrow[\nearrow \quad 1 \quad \searrow]{}$$

Decrece: $(1,+\infty)$

*** Curvatura**

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(-2+x)$$

$$f''(x)=0 \iff e^{-x}(-2+x)=0 \iff -2+x=0 \iff \boxed{x=2}$$

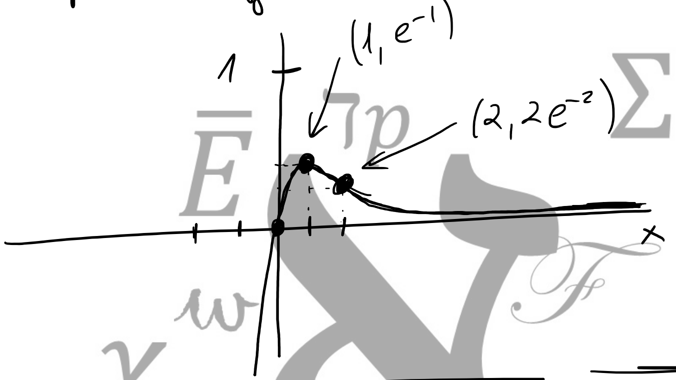
$$\begin{array}{l|ccc} f'' & - & 2 & + \\ f & \cap & & \cup \end{array}$$

cóncavo $(\cup)$: $(2,+\infty)$

convexo $(\cap)$: $(-\infty, 2)$

pto inflexión: $(2, 2e^{-2})$

Representación



(b)

PROBLEMA Nº5

Consideremos las funciones $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = 2 - x\int_0^x e^{-t^2}dt$

a) Estudiar y representar gráficamente la función f (5 puntos).

b) Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)+2-x}{xLn(1-x)}$ (5 puntos)

$f(0)=0$; $g(0)=2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)+2-x}{x\ln(1-x)} = \frac{f(0)-g(0)+2}{0} = \frac{0-2+2}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-g'(x)-1}{\ln(1-x) + x\cdot\frac{-1}{1-x}} =$$

$$= \frac{f'(0)-g'(0)-1}{\ln(1)+0} \overset{*}{=} \frac{1-0-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)-g''(x)}{\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1-x} - x\cdot\frac{-1}{(1-x)^2}} =$$

* $f'(x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x) \longrightarrow f'(0) = 1$

$$g'(x) = -1\cdot\int_0^x e^{-t^2}dt - x\left[\int_0^x e^{-t^2}dt\right]' \overset{(1)}{=} \underbrace{-\int_0^x e^{-t^2}dt - x\cdot e^{-x^2}}$$

(1) $\left[\int_0^x e^{-t^2}dt\right]' = e^{-x^2}$

Th. fundamental del cálculo

$\lfloor$ Uo $\quad$ $\downarrow$ * th. fundamental del cálculo

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in (a,b) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$g'(0) = 0 \qquad -xe^{-x^2} \qquad f'(x) = e^{-x}(1-x)$

$$= \frac{f''(0) - g''(0)}{-2} \underset{*_2}{=} \frac{-2-(-2)}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$*_2$

$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(-2+x) \rightarrow f''(0) = -2$

$g''(x) = -e^{-x^2} - e^{-x^2} - x(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}(-2+2x^2) \rightarrow g''(0) = -2$

$$\boxed{\text{Solución: } \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x) + 2 - x}{x\ln(1-x)} = 0}$$

NTEM
notodoesmatematicas.com