PROBLEMA 1:

Sean f y g dos endomorfismos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ definidos para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como sigue:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x - z, 2y + z),$$
$$g(x, y, z) = (x, y, 0)$$

a) Halle una base, unas ecuaciones y la dimensión del núcleo de f y del núcleo de g.

b) Halle una base, unas ecuaciones y la dimensión de la imagen de f y de la imagen de g.

c) Determine las matrices asociadas a los endomorfismos f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

PROBLEMA 2:

Se consideran los puntos $A(a,0)$ y $A'(-a,0)$, donde $a>0$, y un punto M variable sobre la recta r de ecuación $y=x+1$. Desde A se traza la perpendicular a la recta $A'M$ y desde A' se traza la recta perpendicular a AM, cortándose ambas rectas en un punto Q. Determina el lugar geométrico de los puntos Q según los valores positivos de a y clasifíquelo.

PROBLEMA 3:

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$$

(a) Represente gráficamente la función f haciendo un estudio previo de sus propiedades.

(b) Halle el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función, la asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ y la recta $4y + 7x - 8 = 0$.

PROBLEMA 4:

De una urna con r bolas negras y $N - r$ bolas blancas se extraen n bolas consecutivamente y sin reemplazamiento $(n \leq N)$. Calcule la esperanza y la varianza de la variable aleatoria X que da el número de bolas negras extraídas.