

1) (a) por inducción sobre n

$$* \text{ mcd}(F_1, F_2) = \text{mcd}(1, 1) = 1.$$

$$* \text{ hipótesis de inducción: } \text{mcd}(F_{k-1}, F_k) = 1$$

$$* \text{ veamos que } \text{mcd}(F_k, F_{k+1}) = 1$$

Supongamos que $\text{mcd}(F_k, F_{k+1}) = d \neq 1$, entonces

$$d \mid F_k \text{ y } d \mid F_{k+1} \text{ pero } F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

y sucede necesariamente que $d \mid F_{k-1}$ por lo que

~~de~~ $d \mid F_{k+1}$ y $d \mid F_{k-1}$ en contra de la h.i.

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

inducción sobre n :

$$\rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{supongamos cierto que } A^{n-1} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Sucede que } A^n &= A^{n-1} A = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} & F_n \\ F_{n-1} + F_{n-2} & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

© Una matriz es diagonalizable si cada uno de sus valores propios tiene asociados tantos vectores propios como marca su multiplicidad algebraica:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$p(\lambda) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

por lo que los valores propios asociados a A son:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ambos de multiplicidad 1, por lo que efectivamente, A es diagonalizable (cada valor propio tiene siempre al menos ~~tantos~~ un vector propio asociado).

Para determinar la matriz de Paso P , calculamos los vectores propios por medio de los subespacios propios asociados a cada vector (núcleo de la aplicación lineal asociada):

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}x + y = 0 \rightarrow y = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$$

$$v_1 \left(1, -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}x + y = 0 \rightarrow y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

$$v_2 \left(1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

sendo $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

que sabemos que verifica

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

o b que es (por (b)) :

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot D^n \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & +1/\sqrt{5} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ P & P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ? & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ ? & P \end{pmatrix}$$

obteniendo así que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

(d) ~~Determinando~~ ~~A~~

A partir del cálculo del determinante de A^n obtenemos:

$$|A^n| = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2$$

Desde (c) hemos visto que

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

por lo que ha de suceder que

$$|A^n| = |P \cdot D^n \cdot P^{-1}| = |P| \cdot |D|^n \cdot \frac{1}{|P|} = |D|^n$$

$$|D| = \begin{vmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} = \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4} = -1$$

que dando provando que

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

 $\bar{E}$ $\exists p$ Σ $\mathbb{K}$ w χ n σ $\mathcal{C}_n$ **NTEM**

notodoesmatematicas.com

O

4 $P \equiv$ "resultado positivo test"

$CCR \equiv$ "estar enfermo de CCR"

$C \equiv$ "tener cancer en la población estudiada"

$$P(P|CCR) = 0.68$$

← buen positivo (acertó enfermo)

$$P(\bar{P}|\overline{CCR}) = 0.98$$

← buen negativo (acertó sano)

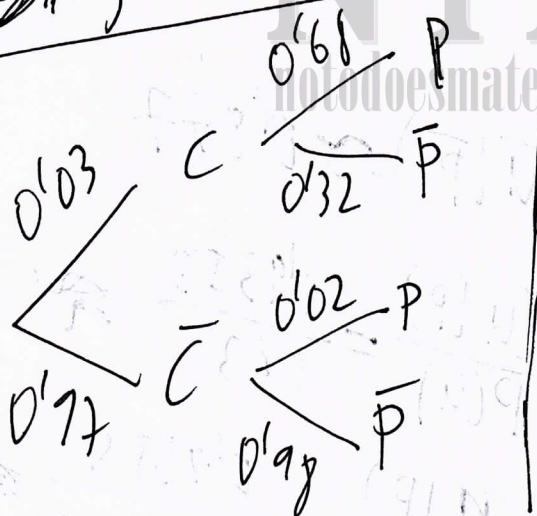
$$P(C) = 0.03$$

← prevalencia

$$(a) P(P|CCR) = P(P|C) = 0.68$$

independiente de la prevalencia al tratarse de una prueba individual.

Diagrama de árbol:



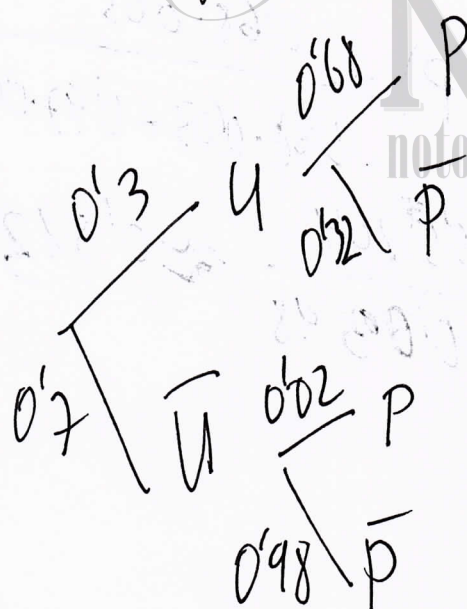
$$(b) P(C|P) = \frac{0.68 \cdot 0.03}{0.68 \cdot 0.03 + 0.97 \cdot 0.02} = \frac{0.0204}{0.0398} \approx 0.513$$

$$\textcircled{c} \quad P(\bar{C} | \bar{P}) = \frac{0'97 \cdot 0'98}{0'97 \cdot 0'98 + 0'03 \cdot 0'32} = \frac{0'9506}{0'9602} \approx 0'99$$

$$\textcircled{d} \quad \frac{P(C|P)}{P(C)} = \frac{0'513}{0'03} = 17'1 \approx 17 \text{ veces}$$

$$\textcircled{e} \quad \frac{P(C|P)}{P(C|\bar{P})} = \frac{0'513}{0'01} = 51'3 \approx 51 \text{ veces}$$

$\textcircled{f} \quad U \equiv \text{"tercer cancer en la población de uruguay"}$
 $P(U) = 0'3.$



$$\rightarrow P(U|P) \approx 0'9358$$

$$\rightarrow P(U|\bar{P}) \approx 0'877$$

$$\rightarrow \frac{P(U|P)}{P(U)} = \frac{0'9358}{0'3} \approx 3 \text{ veces}$$

$$\rightarrow \frac{P(U|P)}{P(U|\bar{P})} = \frac{0'9358}{1-0'877} \approx 8 \text{ veces} \quad (3'6)$$

en los racionales. En el año 1875, K.J.Thomae modificó la *Función de Dirichlet* de la siguiente manera:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ donde p y q son primos entre si} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Teorema 1.1. *La Función de Thomae es continua en los números irracionales y discontinua en los racionales.*

Demostración. Veamos, en primer lugar, que T es discontinua sobre $\mathbb{Q}$. Sea $x_0 = \frac{p}{q}$ un número racional irreducible arbitrario. Como el conjunto de los números irracionales es denso en $\mathbb{R}$, podemos elegir una sucesión de números irracionales, $(x_n)_{n=1}^\infty$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por definición, $T(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mientras que $T(x_0) = \frac{1}{q} \neq 0$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \neq T(x)$. Esto prueba la discontinuidad de T en $x_0 \in \mathbb{Q}$ y como x_0 es arbitrario, concluimos que T es discontinua sobre $\mathbb{Q}$.

Para probar que T es continua sobre los irracionales, será suficiente demostrarlo en los irracionales positivos, $\mathbb{I}^+$. Tomemos cualquier $x_1 \in \mathbb{I}^+$ y sea $0 < \varepsilon < 1$. Elijamos un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Nuestro objetivo es determinar un intervalo abierto con centro en x_0 , digamos J , que no contenga ningún racional de la forma

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{N-1}{N}.$$

□



Figura 1.1. Función de Thomae

Supongamos que hemos obtenido el intervalo J y tomemos cualquier $x \in J$. Notemos ahora que:

- si x es irracional, entonces $T(x) = T(x_1) = 0$ y en consecuencia

$$|T(x) - T(x_1)| = 0 < \varepsilon.$$

- si x es racional, entonces dicho número no es ninguno de los que aparecen en la sucesión anterior y, en consecuencia, su denominador debe ser mayor que N , es decir, x es de la forma $\frac{p}{q}$ con $q > N$ y, por consiguiente,

$$|T(x) - T(x_1)| = |T(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Esto demuestra la continuidad de T en x_1 y la prueba finalizará una vez hayamos construido el intervalo J .

El procedimiento para obtener el intervalo abierto J es el siguiente: comenzamos escogiendo un $\delta_1 > 0$ de modo que el intervalo $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ no contenga ningún número natural. De inmediato seleccionamos otro $\delta_2 > 0$ tal que el intervalo abierto $(x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_2)$ no contenga ningún racional de la forma $\frac{m}{2}$ con m y 2 primos entre sí. Siguiendo con este procedimiento, podemos hallar

un $\delta_k > 0$ tal que el intervalo $(x_1 - \delta_k, x_1 + \delta_k)$ no contenga ningún racional de la forma $\frac{m}{k}$, con m y k primos entre sí y $k = 1, 2, \dots, N$.

Definiendo $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$, resulta que el intervalo $J = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ no contiene ningún racional de los que aparecen en la anterior sucesión y la demostración concluye.