PROBLEMA 1:

a) Hallar la base del sistema de numeración en la que esta bien hecha la operación

$$3753_{(x} - 3586_{(x} = 189_{(x}$$

b) Una vez hallado el valor de x, deducir cuál es el criterio de divisibilidad entre $x-1$, en dicha base x.

c) Después justifica, utilizando el apartado anterior, si alguno de los números dados es divisible entre $x-1$ en la base x.

d) Por último, pasa el primero de los números dados al sistema de numeración de base 9.

PROBLEMA 2:

Sea n un entero fijo positivo. Consideremos el conjunto E de las funciones reales de una variable real definidas de la siguiente forma:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskt + b_k sinkt)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ son números reales cualesquiera.
Definamos para dos funciones f y g de E la operación:

$$< f, g > = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt$$

y consideremos en E las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}:\ \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \varphi_k(t) = coskt \text{ y } \psi_k(t) = \sin kt \text{ para } k = 1,2, \dots, n$$

1.- Demostrar que E es un subespacio vectorial del espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las funciones reales de variable real.

2.- Demostrar que $< f, g >$ define un producto escalar en E, y que el sistema de funciones $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ es una base ortonormal de E referente a dicho producto escalar.

3.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica de periodo 2π e integrable en $[-\pi, \pi]$ y sean:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt\, ; a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) coskt\ dt\, ; b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) sinkt\ dt \text{ para } k = 1,2, \dots, n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; S_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskt + b_k sinkt)\, ; \forall t \in \mathbb{R}$$

(i) Demostrar que: $\forall x \in \mathbb{R}; S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t - x) dt$

(ii) Deducir la igualdad: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin(\frac{\alpha}{2})} d\alpha = 1$ siendo: $D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin(\frac{x}{2})}, \text{si } x \neq 2k\pi \\ n + \frac{1}{2}, \text{si } x = 2k\pi \end{cases}$

PROBLEMA 3:

Consideramos el tetraedro de vértices A, B, C y D. Si el punto E recorre la arista AB, ¿cuándo el ángulo $C\hat{E}D$ es máximo?

PROBLEMA 4:

La probabilidad de que una pareja tenga n hijos es $\alpha \cdot p^n$, con $0 < p < 1$, $n \geq 1, 0 < \alpha \cdot p < 1$

Supongamos que la distribución de sexos entre los hijos son igualmente probables. Obtén:

a) La probabilidad de que tengan al menos un hijo.
b) La probabilidad de que no tengan hijos.
c) La probabilidad de que una pareja tenga k hijos varones, sabiendo que tiene n hijos.
d) La probabilidad de que una pareja tenga k hijos varones.
e) La probabilidad de que una pareja tenga 3 hijos sabiendo que tiene 1 hijo varón.
f) El número esperado de hijos.