PROBLEMA 1:

Sean f y g dos endomorfismos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ definidos para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como sigue:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x - z, 2y + z),$$
$$g(x, y, z) = (x, y, 0)$$

a) Halle una base, unas ecuaciones y la dimensión del núcleo de f y del núcleo de g.

b) Halle una base, unas ecuaciones y la dimensión de la imagen de f y de la imagen de g.

c) Determine las matrices asociadas a los endomorfismos f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

c)

$$f(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{M_e(f) = M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y, 2x-z, 2y+z)$$

$$g(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_e(g) = N} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, 0)$$

$\bar{x} = (x, y, z)$

$$(f \circ g)(\bar{x}) = M \cdot N \cdot \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{M_e(f \circ g)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1

$$(g \circ f)(\bar{x}) = N \cdot M \cdot \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$(g\circ f)(\bar{x}) = N\circ M\cdot \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_e(g\circ f)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\big|\; \exists\, (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ f(\alpha,\beta,\gamma)=(x,y,z)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & -1 & y \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & -1 & y-2x \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & -1 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & z+y-2x \end{array}\right) \qquad \boxed{z+y-2x=0}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\, f \equiv -2x+y+z=0}$$

$$\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=2x-y \end{cases} \longrightarrow \boxed{\beta_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1,0,2)\,(0,1,-1)\}}$$

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f = 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{Im} g \equiv z = 0}$$

$$\boxed{B_{\operatorname{Im} g} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}}$$

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} g = 2}$$

(a) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \boxed{\operatorname{Ker} f \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ -2y-z=0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = -2y \end{cases}$$

$$\boxed{B_{\operatorname{Ker} f} = \{(-1,1,-2)\}}$$

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \boxed{\operatorname{Ker} g \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}}$$

$\{(0,0,1)\}$

$$\boxed{\mathcal{B}_{\ker g} = \{(0,0,1)\}}$$

$$\boxed{\dim \ker g = 1}$$