

El número de vehículos que atraviesan diariamente una zona de velocidad controlada por radar sigue una distribución de Poisson de parámetro λ . Si la probabilidad de que un vehículo no respete el límite fijado es p , se pide:

- (a) Encontrar la distribución del número de infracciones diarias detectadas por el radar.
 (b) Si el radar detectó r infracciones, ¿cuál es la distribución del número de vehículos que atravesaron la zona controlada? ¿Cuál es la media de esta distribución?

$$X \equiv \text{"\# vehículos/día"} \sim P(\lambda) \quad P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$Y \equiv \text{"un vehículo no respeta"} \sim Be(p)$$

$$P(Y=y) = \begin{cases} p & y=1 \\ 1-p & y=0 \end{cases}$$

$$W \equiv \text{"\# vehículos que no respetan límite de entre n"} \\ \sim B(n, p)$$

a) $Z \equiv \text{"\# vehículos no respetan el límite"}$

$$P(Z=z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(W=z | X=n) \cdot P(X=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{z-1} P(W=z | X=n) \cdot P(X=n) +$$

$$+ \sum_{n=z}^{\infty} P(W=z | X=n) \cdot P(X=n) =$$

$$= \dots$$

$$n = z$$

$$= \sum_{n=z}^{\infty} \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} =$$

$$= p^z \cdot e^{-\lambda} \sum_{n=z}^{\infty} \frac{1}{z! (n-z)!} (1-p)^{n-z} \frac{\lambda^n}{\lambda^z} =$$

$$= \frac{p^z \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^z}{z!} \sum_{n=z}^{\infty} \frac{1}{(n-z)!} (1-p)^{n-z} \cdot \lambda^{n-z} =$$

$$= \frac{p^z \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^z}{z!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1-p)^n \lambda^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} = e^{(1-p)\lambda}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{(p\lambda)^z}{z!} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^z}{z!} e^{-p\lambda}$$

$$Z \sim P(\lambda p)$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{b} \quad P(X=n | Z=r) &= \\
 &= \frac{P(Z=r \cap X=n)}{P(Z=r)} = \frac{P(Z=r | X=n) \cdot P(X=n)}{P(Z=r)} = \\
 &= \frac{P(W=r | X=n) \cdot P(X=n)}{P(Z=r)} = \\
 &= \frac{\binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}}{\frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^r}{r!}} = \\
 &= \frac{\cancel{n!}}{r! (n-r)!} \cdot p^r (1-p)^{n-r} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{\cancel{n!}} \cdot \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^r}{r!} = \\
 &= \frac{\cancel{p^r} (1-p)^{n-r} e^{-\lambda} \lambda^n \cancel{r!}}{\cancel{r!} (n-r)! e^{-\lambda p} (\lambda \cancel{p})^r} = \\
 &= \frac{(1-p)^{n-r} e^{-\lambda + \lambda p} \lambda^{n-r}}{(n-r)!} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{[(1-p) \cdot \lambda]^{n-r}}{(n-r)!} e^{-\lambda(1-p)}$$

$$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\lambda \approx \lambda(1-p)$$

$$x = (n-r)$$

$$(X=n | Z=r) \sim P(\lambda(1-p))$$

$$\text{Sup } \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$$

$$E(X) = \sum_{x \in \text{sup } X} x \cdot P(X=x)$$

$$E = \sum_{n=r}^{\infty} n \cdot P(X=n | Z=r) =$$

$$= \sum_{n=r}^{\infty} n \cdot \frac{[(1-p) \cdot \lambda]^{n-r}}{(n-r)!} e^{-\lambda(1-p)} =$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \cdot \sum_{n=r}^{\infty} n \cdot \frac{[(1-p) \lambda]^{n-r}}{(n-r)!} =$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \cdot \sum_{n=r}^{\infty} (n+r-r) \frac{[(1-p)\lambda]^{n-r}}{(n-r)!} =$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \left[\sum_{n=r+1}^{\infty} (n-r) \frac{[(1-p)\lambda]^{n-r}}{(n-r)!} + r \cdot \sum_{n=r}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-r}}{(n-r)!} \right]$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \left[\sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-r}}{(n-r-1)!} + r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} \right] =$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \left[\sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-r-1} \cdot (1-p)\lambda}{(n-r-1)!} + r \cdot e^{(1-p)\lambda} \right]$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \left[(1-p)\lambda \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-r-1}}{(n-r-1)!} + r \cdot e^{(1-p)\lambda} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 & \overline{e^{(1-p)\lambda}} \\
 &= e^{-\lambda(1-p)} \left[(1-p)\lambda \underline{e^{(1-p)\lambda}} + r \cdot e^{(1-p)\lambda} \right] = \\
 &= e^{-\lambda(1-p)} \cancel{e^{(1-p)\lambda}}^{\Delta} \left[(1-p)\lambda + r \right] = (1-p)\lambda + r \quad \#
 \end{aligned}$$

