PROBLEMA Nº1

Dados la matriz $A \in R^{4x3}$, el vector $b \in R^4$, $a \in R$ y el subespacio F de R^4.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-2 \\ a^2 \end{pmatrix}\ \text{y}\ F \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Discutir y resolver cuando sea compatible el sistema AX=b, con $X \in R^3$ (4 puntos).

b) Sea E el espacio columna de A, calcular sus ecuaciones implícitas. (2 puntos).

c) Encontrar una base del subespacio E∩F. (2 puntos).

d) Calcular la matriz B de la transformación lineal. T: $R^3 \to R^4$ que verifica:

$T(e_1) = A(e_2 + e_3)$, $T(e_2) = Ae_3$, $T(e_3) = Ae_2$, donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de R^3. (2 puntos).

a) Th. R-F: $AX=b$ S.C. $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|b)$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-2 \\ 0 & 1 & -1 & a^2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{array}\right)$$

$\boxed{rg(A) = 2}$

$$rg(A|b) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ a^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=\pm 1 \end{cases} \Longrightarrow rg(A|b) \neq 2 \Bigg\}\ \text{Sistema incompatible } \forall a \in R$$

b) $E = \langle (-1\ 0\ 0\ 0)\ (2\ 1\ 1\ 1)\ (0\ -1\ -1\ -1) \rangle$

$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \in E \Leftrightarrow (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = \alpha(-1\ 0\ 0\ 0) + \beta(2\ 1\ 1\ 1) + \gamma(0\ -1\ -1\ -1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_3 - x_2 = 0 \\ x_4 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$E \equiv \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

$\boxed{E \equiv x_2 = x_3 = x_4}$

c) $F \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ $E \equiv x_2 = x_3 = x_4$ ¿E∩F?

$$x \in E \cap F \text{ si } \begin{cases} x \in E \to \\ x \in F \to \end{cases} \begin{cases} x_2 = x_3 = x_4 \to \begin{cases} x_4 = x_2 \to \boxed{x_4 = 0} \\ x_3 = x_2 \to \boxed{x_3 = 0} \end{cases} \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + \cancel{x_2} - \cancel{x_2} = 0 \to \boxed{x_1 = 0} \\ x_1 + x_2 + x_2 = 0 \to x_1 = -2x_2 \quad \boxed{x_2 = 0} \end{cases}$$

$\boxed{E \cap F = \{0\}}$

d) $\begin{cases} T(e_1) = A(e_1 + e_2) \\ T(e_2) = Ae_3 \\ T(e_3) = Ae_2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

¿B? $e_1 (1\ 0\ 0)$ $e_2 (0\ 1\ 0)$ $e_3 (0\ 0\ 1)$

$T(x) = B \cdot x$

$T(e_i) = B \cdot e_i$

$$T(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 1\ 1)^T$$

$$T(e_2) = A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = (0\ \ -1\ \ -1\ \ -1)^T$$

$$T(e_3) = A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (2\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$$

$$T(e_i) = B\cdot e_i$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}$$

CORRECCIÓN (a)

$$T(e_1) = A(e_2+e_3) = A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = (2\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$$

$$T(e_2) = Ae_3 = (0\ \ -1\ \ -1\ \ -1)^T$$

$$T(e_3) = A\cdot e_2 = (2\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$$

$$B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$