Capítulo 2

Determinantes

2.1. Definición e interpretación: qué es, cómo se interpreta, de dónde surge, para qué sirve.

Qué es: Un determinante es un número que se obtiene a partir de una matriz cuadrada, operando sus elementos de una forma concreta. Por eso se dice, que un determinante es una función que relaciona a una matriz con un número.

De dónde surge: Surge de la necesidad de saber si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, o no la tiene. Aunque no lo creas, el concepto de determinante surge antes que el concepto de matriz. Cuando nosotros estamos resolviendo un sistema de ecuaciones lineales (por el método de Gauss), los coeficientes de este sistema se combinan entre sí de una forma concreta. Pues bien, esta forma en que se combinan es exactamente igual a la forma en que combinamos los elementos de una matriz en el cálculo de un determinante. Un determinante es eso, la forma en que se combinan los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales al escalornarlo por medio de transformaciones elementales de Gauss. Cuando los coeficientes del sistema se representan en forma matricial y se hacen esas mismas transformaciones a la matriz, surgen de forma natural, las operaciones concretas que hoy relacionamos con el cálculo del determinante de una matriz.

Para qué sirven: Para resolver sistemas de ecuaciones lienales (Regla de Cramer), para calcular áreas y volúmenes en geometría (producto vectorial y producto mixto de vectores), para estudiar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores (estudiando el rango de la matriz que definen) y para clasificar matrices (la clasificación de matrices permite clasificar formas cuadráticas en álgebra, cónicas y cuádricas en geometría y la curvatura de una superficie en cálculo).

Vídeo externo: Determinantes - qué son, cómo se interpretan, para qué sirven.

Vídeo externo: ¿Por qué... un determinante se calcula de esta manera?

2.2. Vocabulario básico.

Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, denotaremos por $|A|$ o por $det(A)$ al determinante de A, es decir,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.2.1. Menor.

Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, un **menor de orden** k de A es el determinante de una submatriz cuadrada de A de tamaño k obtenida mediante la eliminación de $n - k$ filas y columnas.

2.2.2. Menor principal.

Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, un **menor principal de orden** k de A es el determinante de una submatriz cuadrada de A de tamaño k obtenida mediante la eliminación de las últimas $n - k$ filas y columnas. Se suele denotar, en el contexto adecuado, por m_k.

2.2.3. Menor complementario.

Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, el **menor complementario** del elemento a_{ij} es el determinante de la submatiz cuadrada de A de tamaño

$n-1$ obtenida eliminando la fila i-ésima y la columna j-ésima, es decir, la fila y la columna que contienen al propio a_{ij}. Se suele denotar, en el contexto adecuado, por m_{ij}.

2.2.4. Adjunto.

Sea la matriz $A=(a_{ij})\in M_n(K)$, el **adjunto del elemento** a_{ij} (a veces llamado cofactor), que denotaremos aquí por d_{ij}, es $d_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij}$, donde m_{ij} es el menor complementario del elemento a_{ij}.

2.2.5. Matriz de adjuntos.

La **matriz de adjuntos** de la matriz $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ es la matriz formada por los adjuntos de todos los elementos de A, es decir, $Adj(A)=(d_{ij})\in M_n(K)$.

Propiedad: $Adj(A^t)=(Adj A)^t$

2.3. Propiedades de los determinantes.

En lo que sigue, denotaremos las matrices $A,B\in M_n(K)$, y el escalar $k\in K$, y llamaremos F_i y C_i las distintas filas y columnas, respectivamente de la matriz A, es decir,

$$A=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_n \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_n \end{pmatrix}$$

Se cumple que,

1. Si una fila o una columna de una matriz se multiplican por un escalar k, el determinante queda multiplicado por dicho número,

$$|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & kF_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t|=k|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t|$$

$$|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & kC_p & ... & C_n \end{pmatrix}|=k|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p & ... & C_n \end{pmatrix}|$$

2. Si multiplicamos una matriz A por un escalar k, entonces el determinante queda multiplicado por k^n, siendo n el orden de la matriz, $|kA| = k^n|A|$.

3. Si una fila o una columna de una matriz se descompone en dos sumandos, el determinante de dicha matriz coincide con la suma de los determinantes de dos nuevas matrices, donde cada una contiene a uno de estos sumandos,

$$\begin{array}{l} |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_p + F'_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = \\ = |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| + |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F'_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p + C'_p & ... & C_n \end{pmatrix}| = \\ = |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p & ... & C_n \end{pmatrix}| + |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C'_p & ... & C_n \end{pmatrix}| \end{array}$$

MUY IMPORTANTE: Cuidado!! con sumas en varias filas/columnas. Hay que tener en cuenta todas las posibles combinaciones de sumandos. Por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 + F'_2 & F_3 + F'_3 \end{pmatrix}^t| & \neq & |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}^t| + |\begin{pmatrix} F_1 & F'_2 & F'_3 \end{pmatrix}^t| \\ |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 + F'_2 & F_3 + F'_3 \end{pmatrix}^t| & = & |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}^t| + |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F'_3 \end{pmatrix}^t| \\ & + & |\begin{pmatrix} F_1 & F'_2 & F_3 \end{pmatrix}^t| + |\begin{pmatrix} F_1 & F'_2 & F'_3 \end{pmatrix}^t| \end{array}$$

4. Si se permutan dos filas o columnas de una matriz, su determinante cambia de signo,

$$\begin{array}{l} |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_p & ... & F_q & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = \\ = -|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_q & ... & F_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p & ... & C_q & ... & C_n \end{pmatrix}| = \\ = -|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_q & ... & C_p & ... & C_n \end{pmatrix}| \end{array}$$

5. Si una matriz tiene una fila o columna nula, su determinante vale 0,

$$|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & 0 & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = 0$$

$$|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & 0 & ... & C_n \end{pmatrix}| = 0$$

6. Si una matriz tiene dos filas iguales o porporcionales, entonces su determinante vale 0,

$$|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ...F_p & ... & kF_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = 0$$

$$|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p & ... & kC_p & ... & C_n \end{pmatrix}| = 0$$

7. Si una fila o columna de una matriz se puede obtener como combinación lineal de otras filas o columnas de esta misma matriz, entonces su determinante vale 0,

$$|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & kF_p + tF_q & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = 0$$
$$|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & kC_p + tC_q & ... & C_n \end{pmatrix}| = 0$$

8. Si a una fila o columna le sumamos una combinación lienal de otras filas o columnas, el determinante no varía,

$$|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_l + kF_p + tF_q & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_l & ... & F_n \end{pmatrix}^t|$$
$$|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_l + kC_p + tC_q & ... & C_n \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_l & ... & C_n \end{pmatrix}|$$

9. El determinante del producto de dos matrices coincide con el producto de los determinantes de cada una de las matrices,

$$|AB| = |A||B|$$

10. El determinante de la matriz inversa coincide con la inversa del determinante de la matriz,

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

11. El determinante de una matriz coincide con el determinante de su matriz traspuesta,

$$|A^t| = |A|$$

.

Ejemplo: determinante usando las propiedades.
Calcule los siguientes determinantes,

$$\begin{vmatrix} a & b+c & a+b+c \\ b & a+c & a+b+c \\ c & b+c & a+b+c \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \end{vmatrix}$$

Ejemplo: determinante usando las propiedades.
Sin desarrollar, demuestre que,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo: determinante usando las propiedades.
Sabiendo que,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$$

determine el valor de,

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ b+1 & a+1 & c+1 \\ y/2+3b & x/2+3a & z/2+3c \end{vmatrix}$$

2.4. Cálculo del determinante.

2.4.1. Matrices de tamaño 1.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_1(K)$, entonces $A = (a_{11})$, y $|A| = a_{11}$.

2.4.2. Matrices de tamaño 2.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_2(K)$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2.4.3. Matrices de tamaño 3: Regla de Sarrus.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}) \end{array}$$

Ejemplo: cálculo de determinantes de ordenes pequeños.
Calcule el determinante de las siguientes matrices,

$$A = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.4. Matrices de tamaño n: desarrollo por adjuntos.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{ij}$$

donde d_{ij} es el adjunto del elemento a_{ij}.

Ejemplo: cálculo de un determinante desarrollando por adjuntos.
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & -13 \end{vmatrix}$$

2.4.5. Matrices de tamaño n: reducción de orden.

El cálculo del determinante de una matriz de orden n puede resultar particularmente tedioso conforme el valor de n aumenta. Sin embargo, podemos utilizar las propiedades de los determinantes (en particular la propiedad 8 de nuestra lista), para conseguir ceros en todos los elementos de una fila o columna concreta menos en uno. Esto hará que el desarrollo por adjuntos se haga sobre un sólo elemento, reduciendo de esta manera en una unidad, el orden de la matriz a la que le tenemos que calcular el determinante.

IDEA CLAVE: Aplicamos transformaciones elementales al estilo de Gauss para hacer 0 en todos los elementos de una fila o una columna, menos en uno. Aplicamos el desarrollo por adjuntos sobre esa fila o esa columna. Así, reducimos el orden de la matriz en una unidad. Procedemos iterativamente hasta poder calcular el determinate.

CUIDADO: La forma efectiva de aplicar las transformaciones elementales de Gauss, no es exactamente la misma que cuando estamos reduciendo una matriz para estudiar, por ejemplo, el rango. La propiedad 8 de los determinates nos prohibe multiplicar la fila que vamos a sustituir por un escalar, pues esto afectaría al resultado del determinate. Por lo tanto, si en la aplicación del método de Gauss estándar haríamos la transformación $F_i \to aF_i - bF_j$, cuando estamos calculando determinantes deberíamos hacer $F_i \to F_i - (b/a)F_j$.

Ejemplo: cálculo de un determinante por reducción de orden.
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & -13 \end{vmatrix}$$

2.4.6. Determinantes de Vandermonde.

Es el determinante de una matriz en la que cada fila (o columna) representa una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y de razón x_i. El interés recae en que el determinante de una matriz de esta forma se puede calcular de forma recursiva,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_n^n \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_2 & x_3 & ... & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & ... & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^n & x_3^n & ... & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Ejemplo: Determinantes de Vandermonde.
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix}$$

2.5. Determinantes y matrices.

2.5.1. Rango de una matriz.

El rango de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ coincide con el tamaño de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo.

Ejemplo: cálculo del rango de una matriz.
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

determine su rango.

Ejemplo: rango dependiendo de los valores de un parámetro.
Determine el rango de A según los distintos valores del parámetro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & 4 & t \\ t & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2.5.2. Matriz inversa por adjuntos.

La matriz inversa de $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se puede determinar por medio de,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{|A|}(Adj A)^t$$

Ejemplo: matriz inversa por adjuntos
Determine las matrices inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Vídeo externo: ¿Por qué... la inversa de una matriz se calcula así?

2.6. Ejercicios resueltos.

.

Ejercicio 01:
Calcule los siguientes determinantes,

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 02:
Calcule los siguientes determinantes,

$$a = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{vmatrix}$$

Ejercicio 03:
Calcule los siguientes determinantes,

$$a = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 9 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 04:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & ... & 1 \\ n & 2 & 1 & ... & 1 \\ n & 1 & 3 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & & ... \\ n & 1 & 1 & ... & n \end{vmatrix}$$

Ejercicio 05:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & ... & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ... & 3n \\ ... & ... & ... & & ... \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & ... & n^2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 06:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & ... & a_n \\ ... & ... & ... & & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Ejercicio 07:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Ejercicio 08:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 09:
Determine en función de los parámetros a, b, c el rango de la matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10:
Determine los valores de a, b, c para que el rango de la matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{pmatrix}$$

sea 2.

Ejercicio 11:
Determine los valores de a para que a matriz,

$$\begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-2 & a^2-2a \\ 1 & a^2 & -1 \\ 2-a & 4-2a & a-2 \end{pmatrix}$$

sea invertible. Estudie los casos en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}_7$.

Ejercicio 12:
Estudiar el rango de la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13:
Demuestre que la siguiente matriz es invertible y calcule su inversa,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14:
Dadas las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}$$

calcular A^{-1} y B^{-1}.