Problema 1.
Los números reales no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cumplen las condiciones

- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n$
- $\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \cdots + \binom{a_n}{2} = n$

Probar que $a_i = 2, \forall i$.

Solución.
Entendemos que la definición del coeficiente binomial para un real y un natural es análogo a la definición usual del coeficiente binomial entre naturales, es decir, que si r es real y k es natural, entonces

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

La condición (1) parece clara. La condición (2) la trabajamos para porder interpretarla mejor. Así,

$$\binom{a_i}{2} = \frac{a_i!}{2!(a_i-2)!} = \frac{a_i(a_i-1)}{2}, \forall i$$

lo que nos lleva a que (2) puede escribirse como

$$a_1(a_1-2) + a_2(a_2-2) + \cdots + a_n(a_n-2) = 2n$$

de donde

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 2n$$

y aplicando (1) encontramos que

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 4n$$

El problema se reduce entonces a demostrar que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 4n \end{array}\right\}$$

tiene como única solución $a_i = 2, \forall i$.

Evaluamos algunos casos sencillos para intentar analizar el sentido del problema y encontra algún tipo de patrón en la forma de la demostración de la propiedad.

Caso $n = 1$. Inmediato, pues

$$\left.\begin{array}{r} a_1 = 2 \\ a_1^2 = 4 \end{array}\right\}$$

Caso $n = 2$.

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + a_2 = 4 \\ a_1^2 + a_2^2 = 8 \end{array}\right\}$$

Resolvermos el sistema de ecuaciones no lineal, por ejemplo, por sustitución, despejando $a_2 = 4 - a_1$, de donde

$$a_1^2 + (4-a_1)^2 = 8 \Leftrightarrow a_1^2 + 16 + a_1^2 - 8a_1 = 8 \Leftrightarrow 2a_1^2 - 8a_1 + 8 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 4a_1 + 4 = 0 \Leftrightarrow (a_1-2)^2 = 0$$

de donde necesariamente $a_1 = 2$ y por lo tanto $a_2 = 2$, como se quería demostrar.

Nota: NO puede aplicarse inducción puesto que el que para $n = 1$ se tenga $a_1 = 1$, no garantiza que la ÚNICA solución del sistema

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + a_2 = 4 \\ a_1^2 + a_2^2 = 8 \end{array}\right\}$$

sea $a_1 = a_2 = 2$. Es claro que pueden existir otros pares de números reales (a_1, a_2) que verifiquen el sistema.

<u>Caso $n = 3$.</u>

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 12 \end{array}\right\}$$

En este caso, el sistema tiene una variable libre. Observamos que $12 = 2 \cdot 6$ por lo que

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 12 = 2 \cdot 6 = 2(a_1 + a_2 + a_3)$$

que podemos escribir como

$$(a_1^2 - 2a_1) + (a_2^2 - 2a_2) + (a_3^2 - 2a_3) = 0$$

Ahora, completando cuadrados, observamos que

$$(a_1^2 - 2a_1 + 1) + (a_2^2 - 2a_2 + 1) + (a_3^2 - 2a_3 + 1) = 3 \Leftrightarrow (a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + (a_3 - 1)^2 = 3$$

Cuidado. Está claro que si $a_i = 2$, la igualdad es cierta, pero no está claro que no pueda existir otra combinación de valores reales para los cuales también se cumpla la igualdad. Por lo tanto, vamos a trabajar un poco la expresión, con la ventaja de saber que la solución que buscamos es $a_i = 2, \forall i$. Así, podemos escribir

$$\begin{aligned} 3 &= (a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + (a_3 - 1)^2 = (a_1 - 2 + 1)^2 + (a_2 - 2 + 1)^2 + (a_3 - 2 + 1)^2 = \\ &= (a_1 - 2)^2 + 1^2 + 2(a_1 - 2) + (a_2^2 - 2)^2 + 1^2 + 2(a_2 - 2) + (a_3^2 - 2)^2 + 1^2 + 2(a_2 - 2) = \\ &= (a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + (a_3 - 2)^2 + 2(a_1 + a_2 + a_3) - 12 + 3 \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta que $a_1 + a_2 + a_3 = 6$, tenemos que necesariamente

$$(a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + (a_3 - 2)^2 = 0$$

que es una suma de números no negativos, y que por lo tanto, sólo puede ser nula si todos son nulos, es decir $a_i = 0, i = 1, 2, 3$, como queríamos demostrar. Además, hemos encontrado una estrategia que podemos generalizar.

<u>Caso general.</u>

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 4n \end{array}\right\}$$

De forma análoga al caso $n = 3$, podemos escribir

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 2 \cdot 2n = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ \cdots \\ (a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + \cdots + (a_n - 1)^2 = n \\ (a_1 - 2 + 1)^2 + (a_2 - 2 + 1)^2 + \cdots + (a_n - 2 + 1)^2 = n \\ (a_1 - 2)^2 + 1 + 2(a_1 - 2) + (a_2 - 2 + 1)^2 + 1 + 2(a_2 - 2) + \cdots + (a_n - 2 + 1)^2 + 1 + 2(a_n - 2) = n \\ (a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + \cdots + (a_n - 2)^2 + 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - 4n = 0 \\ (a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + \cdots + (a_n - 2)^2 + 2(2n) - 4n = 0 \\ (a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + \cdots + (a_n - 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

y de nuevo, por ser una suma de no negativos cuyo resultado es nulo, han de ser todos los sumandos nulos, demostrando que $a_i = 2, \forall i$, como queríamos demostrar.