A.1 El número de vehículos que atraviesan diariamente una zona de velocidad controlada por radar sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. Si la probabilidad de que un vehículo no respete el límite fijado es p, se pide:

(a) Encontrar la distribución del número de infracciones diarias detectadas por el radar.

(b) Si el radar detectó r infracciones, ¿cuál es la distribución del número de vehículos que atravesaron la zona controlada? ¿Cuál es la media de esta distribución?

A.2 Encontrar los criterios de divisibilidad por 4 y 13. Aplicar dichos criterios para determinar el mayor número de seis cifras divisible por 4 y por 13.

A.3 Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{z}{1-i}$. Definimos $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f^2$, $\ldots$, $f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}$ y llamamos $f^{(n)}(z) = w_n$.

(a) Si $z = i$, hallar el menor $n \in \mathbb{N}$ posible para que $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ sea real y calcular el valor correspondiente.

(b) Hallar $z^{1/6}$ sabiendo que $w_{200} = i$.

A.4 Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, y f una aplicación lineal de E en E tal que $f^2 = -I$.

(a) Demostrar que f es biyectiva.

(b) Demostrar que si $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, también $B = A \cup \{f(x_n)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

A.5 Tomando sobre el eje OX un punto $P(a, 0)$, construímos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ $(0 \leq a < r)$ el triángulo de vértices $P(a, 0)$, $R(r, 0)$, $Q(a, \sqrt{r^2 - a^2})$. Consideremos ahora el triángulo curvilíneo cuyos lados son: el segmento $\overline{PQ}$, el segmento $\overline{PR}$, y el arco de circunferencia QR.

Calcular el límite del cociente de las áreas de los triángulos mencionados si hacemos tender a hacia r.

B.1 Los dos lados de un triángulo isósceles tienen una longitud ℓ, cada uno, y el ángulo x ellos es el valor de una variable aleatoria X con función de densidad proporcional a $x(\pi - x)$ en cada punto $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Calcular la función de densidad del área del triángulo y su esperanza.

B.2 Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros reales). Supongamos que si a, b, c son las tres raíces de P, las de Q son $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{b+c}{2}$. Determinar todos los posibles polinomios P y Q.

B.3 Un cartel, situado en una pared, tiene sus bordes superior e inferior a alturas m y n, respectivamente, con referencia a la visual de un lector. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el lector del cartel para que el ángulo visual determinado por la pupila y los bordes sea máximo?

B.4 Un cuadrado $ABCD$ de centro O y lado 1 se gira un ángulo α alrededor de O. Hallar el área común de ambos cuadrados.

B.5 Hallar la envolvente de los círculos que tienen sus centros sobre la parábola $y^2 = 2px$, y que pasan por el vértice de dicha parábola.