PROBLEMA 4:

La probabilidad de que una pareja tenga n hijos es $\alpha \cdot p^n$, con $0 < p < 1$, $n \geq 1$, $0 < \alpha \cdot p < 1$

Supongamos que la distribución de sexos entre los hijos son igualmente probables. Obtén:

a) La probabilidad de que tengan al menos un hijo.
b) La probabilidad de que no tengan hijos.
c) La probabilidad de que una pareja tenga k hijos varones, sabiendo que tiene n hijos.
d) La probabilidad de que una pareja tenga k hijos varones.
e) La probabilidad de que una pareja tenga 3 hijos sabiendo que tiene 1 hijo varón.
f) El número esperado de hijos.

$X \equiv$ "cantidad de hijos" $\rightarrow \boxed{P(X=n) = \alpha \cdot p^n}$

a) $P(X \geq 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha p^n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} p^n \overset{*}{=} \boxed{\alpha \frac{p}{1-p}}$

*
$$S = p + p^2 + p^3 + \dots$$
$$p\,S = \quad p^2 + p^3 + \dots$$
$$(1-p)S = p \longrightarrow S = \frac{p}{1-p}$$

$$\frac{p}{1-p} + 1 = \frac{\cancel{p} + 1 - \cancel{p}}{1-p}$$

b) $P(X=0) = 1 - P(X \geq 1) = \boxed{1 - \frac{\alpha p}{1-p}}$

c) $V \equiv$ "hijo varón" $/$ "$X=n$" $\sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$

$$P(V=k \mid X=n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} =$$

$$P(V=k\mid X=n)=\binom{\cdot}{k}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\qquad k=0,1,2,\dots,n.$$

(d) $$P(V=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(V=k\mid X=n)\cdot P(X=n)$$

$\boxed{k=0}$ $$P(V=0)=\sum_{n=0}^{\infty}P(V=0\mid X=n)\cdot P(X=n)=$$

$$P(V=0\mid X=0)\cdot P(X=0)+\sum_{n=1}^{\infty}P(V=0\mid X=n)\cdot P(X=n)=$$

$$1-\frac{\alpha p}{1-p}+\sum_{n=1}^{\infty}\cancel{\binom{n}{0}}^{\,1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\alpha p^{n}=$$

$$1-\frac{\alpha p}{1-p}+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}1\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{n}=\boxed{1-\frac{\alpha p}{1-p}+\alpha\frac{p}{(2-p)}}$$

(*) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{2}\right)^{n}=\frac{p/2}{1-p/2}=\frac{p}{2-p}$$

$$\cancel{p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2-p-p\cdot(-1)}{(2-p)^2} = \frac{2p}{(2-p)^2}}$$

$\boxed{k \neq 0}$

$$P(V=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(V=k \mid X=n)\cdot P(X=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \alpha \cdot p^{n} =$$

$$= \alpha \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^{n} = \alpha \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{p}{2}\right)^{n} = \circledast$$

$\circledast$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^{n} = \frac{1}{1-p/2} = \frac{2}{2-p} = 2(2-p)^{-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = +2(2-p)^{-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1) \left(\frac{p}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = +4(2-p)^{-3} = 2\cdot 2!\,(2-p)^{-3}$$

$$\left(\ \right)^{n-3} \left(\ \right)^{3} \quad \ldots (2-p)^{-4}$$

$$n=2$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\left(\frac{p}{2}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{+4\cdot 3}{2\cdot 2}(2-p)^{-4} = 2\cdot 3!\,(2-p)^{-4}$$

$$n=3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2\cdot k!\cdot(2-p)^{-(k+1)}$$

$$\boxed{\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{p}{2}\right)^{k} = \frac{2k!\,p^{k}}{(2-p)^{k+1}}}$$

$$= \alpha\,\frac{2\cancel{k!}\,p^{k}}{(2-p)^{k+1}\cdot\cancel{k!}} = \boxed{\frac{2\cdot\alpha\cdot p^{k}}{(2-p)^{k+1}}}$$

e)

$$P(X=3\mid V=1) = \frac{P(V=1\mid X=3)\cdot P(X=3)}{P(V=1)} =$$

$$\frac{\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\cancel{\alpha}\,p^{\cancel{3}\,2}}{\frac{2\cdot\cancel{\alpha p}}{(2-p)^{2}}} = \boxed{\frac{3}{16}p^{2}(2-p)^{2}}$$

$$(2-p)^2$$

(b) $$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty} n\,P(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,P(X=n)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha\cdot p^n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot p^n=(*)=\boxed{\frac{\alpha\cdot p}{(1-p)^2}}$$

(*) $$\sum_{n=0}^{\infty} p^n=\frac{1}{1-p}=(1-p)^{-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1}\cdot p=+(1-p)^{-2}\cdot p$$