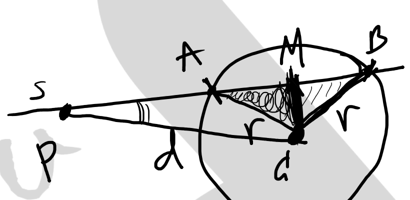
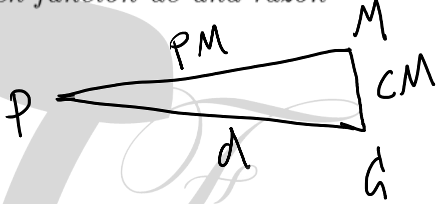
Problema 1. *Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y P un punto del plano euclídeo exterior a la circunferencia. Sea s una recta que pasa por P y es secante con $\mathcal{C}$. Si A y B son los puntos de corte de la circunferencia con s, demuestre que el producto $PA \cdot PB$ no depende de la recta secante s elegida.*
2. *En un terreno llano se ha construido un estanque de planta circular en el que la superficie libre de agua enrasa con el terreno. El estanque está centrado en el punto $C(43,31)$ y su radio es de 30 m. Un pato, situado inicialmente en el punto $P(3,1)$, marcha en línea recta y con velocidades uniformes de 0,32 m/s y 0,96 m/s, sobre tierra y nadando, respectivamente, con el fin de llegar a la orilla opuesta. Determine la dirección que debe tomar el pato para que la duración del recorrido sea la mínima posible y calcule el tiempo correspondiente.*

NOTA. *La dirección del pato debe ser expresada en función de una razón trigonométrica.*

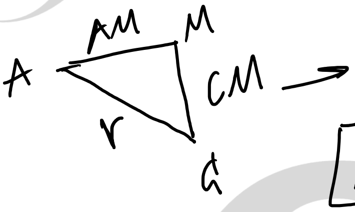
(1)





$\rightarrow d^2 = CM^2 + PM^2$

$\boxed{PM^2 = d^2 - CM^2}$



$\rightarrow r^2 = CM^2 + AM^2$

$\boxed{AM^2 = r^2 - CM^2}$

$$PA \cdot PB = (PM - AM)(PM + MB) = (PM - AM)(PM + AM) =$$

$$= PM^2 - AM^2 = d^2 - \cancel{CM^2} - r^2 + \cancel{CM^2}$$

$$\boxed{= d^2 - r^2}$$

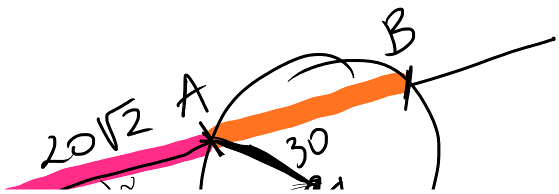
(2)

$C(43,31)$ $r = 30$

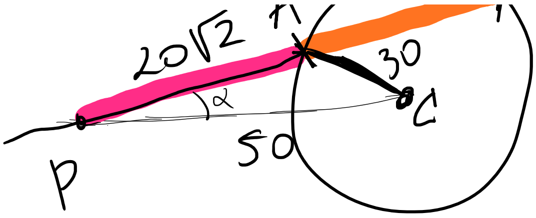
$v_1 = 0'32$

$v_2 = 0'96$

$P(3,1)$



$$\boxed{PA \cdot PB = 50^2 - 30^2 = \\ = 2500 - 900 = 1600}$$



$$PB = \frac{1600}{PA}$$

$$\vec{PC} = (40,30) \rightarrow |\vec{PC}| = \sqrt{40^2+30^2} = \sqrt{2500} = 50$$

$$1 \longrightarrow 0'32$$
$$? \longrightarrow PA$$

$$t = \frac{PA}{0'32} + \frac{AB}{0'96} =$$

$$= \frac{PA}{0'32} + \frac{PB-PA}{0'96} = \frac{3PA+PB-PA}{0'96} = \boxed{\frac{2PA+PB}{0'96}}$$

$$t = \frac{1}{0'96}\left(2PA + \frac{1600}{PA}\right)$$

$$t' = \frac{1}{0'96}\left(2 - \frac{1600}{PA^2}\right)$$

mínimo relativo ~~para~~ t

$-\ \Downarrow\ +$

$\searrow\ 20\sqrt{2}\ \nearrow$

$$t' = 0 \longleftrightarrow 2 - \frac{1600}{PA^2} = 0 \rightarrow 2 = \frac{1600}{PA^2}$$

$$PA^2 = 800$$

$$PA = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$$

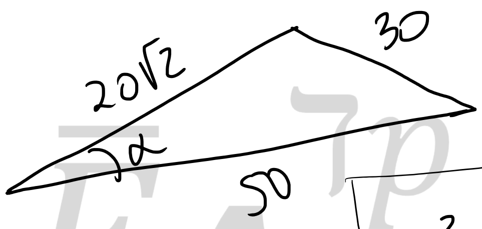
$$\boxed{PA = 20\sqrt{2}\ m} \longrightarrow PB = \frac{160\cancel{0}}{2\cancel{0}\sqrt{2}} = \frac{80\sqrt{2}}{2} = 40\sqrt{2}$$

$$\boxed{AB = PB - PA = 20\sqrt{2}\ m}$$

$$t = \underbrace{80\sqrt{2}}_{2PA+PB} = 120\sqrt{2} \approx 188'85 \text{ seg.}$$

$$\boxed{t = \frac{80\sqrt{2}}{0'96} = \frac{250\sqrt{2}}{3} \approx 117'85 \text{ seg.}}$$

117'85 seg



$$30^2 = 50^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2\cdot 50\cdot(20\sqrt{2})\cos\alpha$$

$$900 = 2500 + 800 - 2000\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$\frac{900 - 2500 - 800}{-2000\sqrt{2}} = \cos\alpha$$

$$\frac{-2400\sqrt{2}}{-4000} = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} \rightarrow \boxed{\alpha \approx 31'95^\circ} \ ?$$

$$\alpha = \arccos\frac{3\sqrt{2}}{5}$$