Álgebra lineal: Guía práctica del estudiante.

Jose María Sánchez Reales

notodoesmatematicas.com

Indice

Capítulo 0

Preliminares

0.1. Notación.

Denotaremos los conjuntos numéricos conocidos comos sigue:

- Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.
- Números enteros positivos: $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- Números enteros: $\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
- Números racionales: $\mathbb{Q} = \{a/b | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, y teniendo en cuenta que $a/b = c/d$ si y solo si $ad = bc$.
- Números reales: $\mathbb{R}$.
- Números complejos: $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

0.2. Definiciones previas.

0.2.1. Cuerpo.

Un cuerpo es un conjunto K con dos operaciones que llamaremos suma y producto y que denotaremos por $+$ y Δ, respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades,

1. La suma es asociativa: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a+(b+c) = (a+b)+c$.
2. La suma es conmutativa: Dados $a, b \in K$, entonce $a + b = b + a$.

3. Existencia de elemento neutro para la suma: Existe un elemento que denotamos por $0 \in K$ y que llamamos elemento neutro para la suma, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para cualquier $a \in K$.

4. Existencia de elemento opuesto para la suma: Para todo $a \in K$ existe un elemento $a' \in K$ de forma que $a + a' = a' + a = 0$. En el caso de la suma, llamaremos a este elemento el opuesto de a y lo denotaremos por $-a$.

5. El producto es asociativo: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

6. El producto es conmutativo: Dados $a, b \in K$, entonce $a \cdot b = b \cdot a$.

7. Existencia de elemento neutro para el producto: Existe un elemento que denotamos por $1 \in K$ y que llamamos elemento uno (unidad), tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para cualquier $a \in K$.

8. Existencia de elemento inverso para el producto: Para todo $0 \neq a \in K$ existe un elemento $a'' \in K$ de forma que $a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1$. Este elemento inverso se denota por a^{-1} o $1/a$.

9. El producto es distributivo respecto a la suma: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Cuidado: Estamos definiciendo cuerpo conmutativo. Puede definirse un cuerpo no conmutativo excluyendo de la definición propiedad correspondiente. La definición puede variar según el autor, por lo tanto es importante contextualizar en qué situación estamos trabajando.

Notación: Será común denotar el producto $a \cdot b$ por ab.

0.2.2. Grupo abeliano.

Se dice que un conjunto K con una operación que denotamos por $+$ y a la cual llamamos suma, es un grupo abeliano si se cumplen las siguientes propiedades,

1. Asociativa: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2. Conmutativa: Dados $a, b \in K$, entonce $a + b = b + a$.

3. Existencia de elemento neutro: Existe un elemento que denotamos por $0 \in K$ y que llamamos elemento neutro para la suma, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para cualquier $a \in K$.

4. Existencia de elemento simétrico: Para todo $a \in K$ existe un elemento $a' \in K$ de forma que $a + a' = a' + a = 0$. En el caso de la suma, llamaremos a este elemento el opuesto de a y lo denotaremos por $-a$.

0.2.3. Anillo.

Un anillo es un conjunto K con dos operaciones que llamaremos suma y producto y que denotaremos por $+$ y Δ, respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades,

1. La suma es asociativa: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a+(b+c) = (a+b)+c$.

2. La suma es conmutativa: Dados $a, b \in K$, entonce $a + b = b + a$.

3. Existencia de elemento neutro para la suma: Existe un elemento que denotamos por $0 \in K$ y que llamamos elemento neutro para la suma, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para cualquier $a \in K$.

4. Existencia de elemento opuesto para la suma: Para todo $a \in K$ existe un elemento $a' \in K$ de forma que $a + a' = a' + a = 0$. En el caso de la suma, llamaremos a este elemento el opuesto de a y lo denotaremos por $-a$.

5. El producto es asociativo: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.

6. El producto es conmutativo: Dados $a, b \in K$, entonce $a \cdot b = b \cdot a$.

7. Existencia de elemento neutro para el producto: Existe un elemento que denotamos por $1 \in K$ y que llamamos elemento uno (unidad), tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para cualquier $a \in K$.

8. El producto es distributivo respecto a la suma: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Cuidado: Estamos definiciendo anillo conmutativo y con identidad. Puede definirse un anillo no conmutativo o sin identidad excluyendo de la definición las correspondientes propiedades. La definición puede depender del autor, por lo tanto es importante contextualizar en qué situación estamos trabajando.

Nota: Un anillo es un cuerpo para el que no se garantiza que cada elemento no nulo tenga inverso respecto a la operación producto.

0.2.4. Grupo.

Se dice que un conjunto K con una operación que denotamos por $*$, es un grupo si se cumple

1. La operación es asociativa: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a * (b * c) = (a * b) * c$.

2. Existencia de elemento neutro: Existe un elemento que denotamos por $e \in K$ y que llamamos elemento neutro, tal que $e * a = a * e = a$ para cualquier $a \in K$.

3. Existencia de elemento simétrico: Para todo $a \in K$ existe un elemento $b \in K$ de forma que $a * b = b * a = e$.

Nota: Un grupo es un grupo abeliano no conmutativo.

Capítulo 1

Matrices

1.1. Definición e interpretación: qué es, cómo se interpreta, para qué sirve.

Qué es: una matriz es una ordenación concreta de números por filas y por columnas que se representan entre paréntesis. Formalmente y de forma descontextualizada, una matriz, llamemosla A, es un objeto matemático de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} \in K$, para $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$, donde n, m números naturales y K un cuerpo. Esto se puede escribir de forma abreviada como $A = (a_{ij})$ detallando el recorrido de los subindices en caso de que fuera necesario.

De dónde surge: Las matrices surgen de la necesidad de simplificar la escritura de un sistema de ecuaciones lineales. Por ejemplo, el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +...+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +...+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +...+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

queda representado univocamente (sin lugar a dualidades) por la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

y es obvia la simplificación que supone este tipo de escritura.

Para qué sirve: Como ya hemos dicho sirve para simplificar la escritura de un sistema de ecuaciones, pero además, este descubrimiento inocente ha resultado ser una herramienta realmente poderosa para representar funciones lineales, formas bilineales, formas cuadráticas, o trabajar con espacios vectoriales. Todo ello lo veremos en distintos temas de este curso. Además, las matrices tienen aplicaciones en otros campos: series temporales, cadenas de markov, estructuras de dependencia (varianzas y covarizas), grafos, o sus aplicaciones en el cálculo con las matrices Hessiana y Jacobiana.

Vídeo Externo: Matrices - qué son, cómo se interpretan, para qué sirven.

1.2. Vocabulario básico I.

1.2.1. Tamaño, dimensión y orden.

El **tamaño** de una matriz es la cantidad de filas y columnas dicha matriz (y además, en ese orden). Por lo tanto, utilizando la notación arriba, el tamaño de la matriz A es $m \times n$.

Tamaño, **dimensión** y **orden** son sinónimos.

Al conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ cuyos elementos están en el cuerpo K lo denotamos por $M_{m,n}(K)$.

1.2.2. Matriz fila y matriz columna.

Una **matriz fila** es una matriz del conjunto $M_{1,n}(K)$, de tamaño $1 \times n$, es decir, está formada por por una sola fila,

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Una **matriz columna** es una matriz del conjunto $M_{m,1}(K)$, de tamaño $m \times 1$, es decir, está formada por una sola columna,

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Ejemplos de matriz fila serían,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

y matrices columna,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Matriz cuadrada.

Una matriz cuadrada es aquella en la que $m = n$, es decir, que tiene la misma cantidad de filas que de columnas,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se dice entonces que A es una matriz cuadrada de orden n.

Al conjunto de matrices cuadradas de orden n cuyos elementos están en el cuerpo K lo denotamos por $M_n(K)$.

Diagonal principal y diagonal secundaria. La diagonal principal de una matriz es la formada por los elementos posicionados en un mismo orden en fila y columna. Es decir, por $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$. La diagonal secundaria es la diagonal que se forma en sentido contrario al de la diagonal principal, es decir, la que forman los elementos $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$. Esto se puede escribir de forma más rigurosa diciendo que los elementos de la **diagonal principal** son los de la forma a_{ii}; y los de la **diagonal secundaria** los a_{ij} para los cuales $i + j = n + 1$, donde n es el orden (tamaño) de la matriz. Para que quede claro, la diagonal principal sería,

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -4 \\ 3 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 1 & 3 & \boxed{4} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & -3 \\ 1 & 3 & \boxed{4} & 1 \\ -5 & 1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

y las diagonales secundarias,

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{-4} \\ \boxed{3} & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ \boxed{1} & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 2 & \boxed{-2} & -3 \\ 1 & \boxed{3} & 4 & 1 \\ \boxed{-5} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: la mayoría de los textos enlazan el concepto de diagonal principal / diagonal secundaria con la presuposición de estar trabajando con una matriz cuadrada. Sin embargo (y quizá cometiendo un abuso de notación) a menudo nos referiremos a las diagonales principal / secundaria de una matriz no cuadrada como aquellas formadas por los elementos a_{ii} y a_{ij} $(i + j = n + 1)$ como se definió en el parrafo anterior.

1.2.4. Matriz triangular.

Una matriz triangular es aquella que tiene ceros por debajo o por encima de la diagonal principal. Una matriz **triangular superior** es cualquiera de las que sigue,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y una matriz **triangular inferior** como una de estas,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.5. Matriz diagonal, matriz escalar y matriz identidad.

Una matriz se dice que es una **matriz diagonal** si todos los elementos fuera de la diagonal principal son nulos, es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Algunos ejemplos de matrices diagonales de orden 2, 3 y 4, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matriz se dice que es una **matriz escalar** si es diagonal y todos los elementos de esta son iguales. Algunos ejemplos de matrices escalares de orden 2, 3 y 4, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La **matriz identidad** es la matriz diagonal formada por unicamente unos en la diagonal, es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, y $a_{ii} = 1$. Esta matriz es muy importante porque es el elemento neutro para el producto de matrices. Ejemplos para los casos particulares para la identidad de orden 2, 3, y 4 son,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se denota comumnente como I_n (donde n hace referencia al tamaño de la matriz) o simplemente como I si no hay confusión sobre su tamaño.

1.2.6. Matriz nula, matriz opuesta y matriz traspuesta.

Una **matriz nula** es aquella en la que todos sus elementos son nulos, se denota por $0_{n\times m}$, o símplemente por 0 cuando no haya confusión con su tamaño.

$$0_{n\times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz $A \in M_{m,n}(K)$, $A = (a_{ij})$, llamaremos **matriz opuesta** de A, a la matriz $-A = (-a_{ij})$,

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dada una matriz $A \in M_{m,n}(K)$, $A = (a_{ij})$, llamaremos **matriz traspuesta** de A, y denotaremos por A^t, a la matriz que se obtiene intercambiando filas por columnas en A, es decir, $A = (a_{ji})$,

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 4 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta.

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- $(kA)^t = kA^t$

1.2.7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica.

Una matriz $A \in M_n(K)$ se dice que es una **matriz simétrica** si y solo si $A^t = A$.

CONCLUSIÓN: Una matriz es simétrica cuando los elementos que son simétricos respecto a la diagonal principal son iguales, es decir, aquella en la que $a_{ij} = a_{ji}$.

Una matriz $A \in M_n(K)$ se dice que es una **matriz antisimétrica** si y solo si $A^t = -A$.

CONCLUSIÓN: Una matriz es antisimétrica cuando los elementos que son simétricos respecto a la diagonal principal son iguales en valor absoluto pero de distinto signo, es decir, aquella en la que $a_{ij} = -a_{ji}$.

Ejemplos de matrices simétricas son,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y antisimétricas,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.8. Igualdad de matrices.

Dadas dos matrices $A, B \in M_{m,n}(K)$, con $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, se dice que son iguales si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todos los pares i, j.

Obviedad: La primer condición es que las matrices han de ser del mismo tamaño.

Ejemplo: Igualdad de matrices.
Determine los valores de los parámetros para los que $A = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & b-1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2d+1 & 3e \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & c-1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & c & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Operaciones con matrices.

1.3.1. Suma de matrices.

Dadas dos matrices $A, B \in M_{m,n}(K)$, con $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, se define la suma de A y B, y se denota por $A+B$, como es la matriz $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$.

CONCLUSIÓN: Las matrices se suman término a término.

Propiedades de la suma de matrices.

- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Comnutativa: $A + B = B + A$
- Existe elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$, donde 0 es una matriz formada enteramente por 0s.
- Existencia de elemento simétrico: $A + (-A) = (-A) + A = 0$, donde $-A$ es una matríz cuyos elementos son iguales que los de A pero con signo contrario.

NOTA: Observese que se está exigiendo que las dos matrices sean del mismo tamaño. En otro caso la suma no tiene sentido.

Vídeo Externo: ¿Por qué... la suma de matrices?

1.3.2. Producto de una matriz por un escalar.

Dada la matriz $A \in M_{m,n}(K)$, con $A = (a_{ij})$, y un escalar $k \in K$, se define el producto de una matriz por un escalar y se denota por kA, como la matriz $kA = (ka_{ij})$.

CONCLUSIÓN: Para multiplicar una matriz por un escalar multiplicamos todos sus elementos por dicho escalar.

Propiedades del producto de una matriz por un escalar.

- Es distributivo respecto de la suma de escalares: $(k + t)A = kA + tA$
- Es distributivo respecto de la suma de matrices: $k(A + B) = kA + kB$
- $0A = 0$ y $1A = A$

1.3.3. Producto de matrices.

Dadas las matrices $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in M_{np}(K)$, se define el producto de A y B, y se denota por AB, como la matriz $AB = (c_{ij}) \in M_{mp}(K)$, con $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}bkj$.

CONCLUSIÓN: Las matrices se multiplican en el sentido de filas por columnas, recorriendo todas las filas de la primera matriz y todas las columnas de la segunda matriz, multiplicando elemento a elemento y sumando las cantidades. El resultado de esta suma de productos se coloca en la posición correspondiente a la fila y la columna que se están multiplicando.

Vídeo Externo: ¿Por qué... el producto de matrices?

Vídeo Externo: Multiplicar matrices fácil y rápido.

Propiedades del producto de matrices.

- Asociativo: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (siempre que tenga sentido)

- Exite elemento neutro: $I \cdot A = A \cdot I = A$ (con la identidad del tamaño correspondiente)

- Es distributivo por la izquierda respecto de la suma de matrices: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (cuando tenga sentido)

- Es distributivo por la derecha respecto de la suma de matrices: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (cuando tenga sentido)

- Asociativo en el producto por un escalar: $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$ (cuando tenga sentido)

MUY IMPORTANTE: El producto de matrices no es comnuntativo.

NOTA: $A_{n\times m}B_{m\times k} = C_{n\times k}$.

Ejemplo: Producto de matrices.
Dadas las matrices A y B, determine los productos AB y BA,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Operaciones con matrices.
Dadas las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

determine $A+B$, $A-B$, $3A-2B$, AB y BA.

1.3.4. Potencia de una matriz.

Calcular la potencia de una matriz es equivalente a calcular productos sucesivos, tantas veces como indique el exponente, es decir, $A^n = A \overset{(n)}{\cdots} A$. El producto se realiza de forma inductiva, $A^n = A^{n-1}A = AA^{n-1}$.

Una matriz se dice que es **idempotente** si $A^2 = A$.

Una matriz se dice que es **nilpotente** de orden n, si $A^i = 0$ para todo $i \geq n$.

Una matriz se dice que es **involutiva** si $A^2 = I$.

Habrá tres situaciones en las que podrémos encontrar de forma sencilla la potencia n-ésima de una matriz:

- cuando encontramos un patrón de comportamiento al ir haciendo potencias sucesivas;
- cuando exista un ciclo al hacer potencias sucesivas, es decir, existe un k para el cual $A^k = I$;

- cuando $A = (I + B)$ donde I es la matriz identidad y B una matriz nilpotente.

.

Ejemplo: Potencia de una matriz - ciclo.
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule A^n.

Ejemplo: Potencia de una matriz - inducción.
Calcule A^{2017}, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Potencia de una matriz - nilpotente.
Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule A^n.

1.3.5. Resta y división de matrices.

En las propiedades de la suma de matrices hemos visto que se garantiza la existencia de elemento simétrico, es decir, para cada $A \in M_{mn}(K)$ existe un $-A \in M_{mn}(K)$ de forma que $A + (-A) = 0$ (recuerda que definiamos $-A$ como la matriz opuesta de la matriz A). Esto indirectamente nos formaliza la resta de matrices (equivalente a sumar el elemento simétrico) de forma que $A - A = A + (-A)$.

La división de matrices, sin embargo, no existe como tal. Para "dividir" tenemos que multiplicar por otra matriz de forma que el resultado sea el elemento neutro del producto. Además, sabemos que el producto de matrices no es conmutativo, por lo tanto, existirán ciertas condiciones para la existencia de esta matriz inversa.

1.4. Matriz escalonada y matriz escalonada reducida.

Llamaremos **pivote** de una fila al primer elemento no nulo de dicha fila.

Una matriz está **escalonada por filas** si:

- el pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila inmediatamente anterior,
- el pivote de cada fila es un 1,
- todos los elementos por debajo del pivote de una fila son 0,
- todas las filas nulas de la matriz están agrupadas en la parte inferior.

Se dice que además es **escalonada reducida por filas** si los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila son todos cero.

Ejemplos: Primero matrices que sí están escalonadas por filas,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y ahora, unas matrices que no lo están,

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Una matriz está **escalonada por columnas** si:

- el pivote de cada columna está por debajo del pivote de la columna inmediatamente anterior,
- el pivote de cada columna es un 1,

- todos los elementos a la derecha del pivote de una columna son 0,
- todas las columnas nulas de la matriz están agrupadas en la parte derecha.

Se dice que además es **escalonada reducida por columnas** si los elementos que aparecen en la misma fila que el pivote de una columna son todos cero.

Ejemplos: Primero matrices que sí están escalonadas por columnas,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y ahora, unas matrices que no lo están,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA IMPORTANTE: Hay autores para los que una matriz escalonada no requiere tener pivote 1. Esto será suficiente para la mayoría de las aplicaciones en las que necesitamos obtener una matriz equivalente escalonada (determinar el rango de una matriz o resolver un sistema de ecuaciones lineales). Sin embargo, obligar a que el pivote sea 1 nos permitirá que la matriz escalonada equivalente a una matriz dada sea única.

1.5. Transformaciones elementales.

Sea $A \in M_{m,n}(K)$, llamaremos **transformaciones elementales de filas** sobre la matriz A a cada una de las transformaciones del siguiente tipo:

- Intercambiar la posición de dos filas.
- Multipliclar todos los elementos de una fila por un elemento no nulo de K.
- Sumar a una fila otra multiplicada por un elemento de K.

Sea $A \in M_{m,n}(K)$, llamaremos **transformaciones elementales de columnas** sobre la matriz A a cada una de las transformaciones del siguiente tipo:

- Intercambiar la posición de dos columna.
- Multiplicar todos los elementos de una columna por un elemento no nulo de K.
- Sumar a una columna otra multiplicada por un elemento de K.

Si tenemos una matriz $A \in M_{m,n}(K)$, y tras una serie de transformaciones elementales por filas y/o columnas, obtenemos una matriz B, entonces diremos que A y B son matrices **equivalentes**. Conseguir matrices equivalentes es de gran utilidad. Por ejemplo, llas matrices equivalentes por filas son distintas, pero determinan sistemas de ecuaciones que tienen la misma solución, y sus filas generan los mismos subespacios vectoriales. Esto permite simplificar el problema encontrando matrices equivalentes que sean más sencillas que la original.

1.5.1. Forma normal de Hermite.

Para cada matriz $A \in M_{m,n}(K)$ existe una única matriz escalonada reducida por filas equivalente a A a través de transformaciones elementales por filas. A esta matriz la llamamos **forma normal de Hermite por filas** de A (también recibe el nombre de forma escalonada reducida, o forma de Gauss-Jordan de A).

Para cada matriz $A \in M_{m,n}(K)$ existe una única matriz escalonada reducida por columnas equivalente a A a través de transformaciones elementales por columnas. A esta matriz la llamamos **forma normal de Hermite por columnas** de A.

1.5.2. Matrices elementales.

Llamamos matrices elementales a aquellas que se obtienen de aplicar sobre la matriz identidad una única transformación elemental. Por lo tanto habrá matrices elementales de tres tipos.

- En la matriz identidad intercambiamos dos filas (columnas).

- En la matriz identidad multiplicamos una fila (columna) por un escalar $k \in K$.

- En la matriz identidad sumamos a una fila (columna) el producto de otra fila (columna) por un escalar $k \in K$.

Si obtenemos B al aplicar una transformación elemental por filas a la matriz A y obtenemos E al aplicar la misma transformación elemental por filas a la matriz identidad I, entonces $B = EA$. Análogamente, si obtenemos B al aplicar una transformación elemental por columna a la matriz A y obtenemos E al aplicar la misma transformación elemental por columnas a la matriz identidad I, entonces $B = AE$.

Esto nos permite reinterpretar el producto de matrices como la aplicación de una combinación de transformaciones elementales a una matriz. En particular, aplicar transformaciones elementales por filas será equivalente a multiplicar por la derecha, y aplicar transformaciones elementales por columnas será equivalente a multiplicar por la izquierda.

En general, si obtenemos una matriz B al aplicar una serie de transformaciones elementales por filas sobre la matriz A y E_i son las matrices elementales obtenidas de realizar esa mismas transformaciones elementales por filas sobre la matriz identidad I, entonces $B = E_k \cdots E_2 E_1 A = PA$ donde diremos que $P = E_k \cdots E_2 E_1$, es una matriz de paso. De forma equivalente se puede generalizar la relación existente entre la aplicación de transformaciones elementales por columnas y el producto por la izquierda.

Vídeo: Relación producto de matrices y transformaciones elementales.

Esta propiedad es de grandísima utilidad y es la que sostiene muchos de los cálculos que realizamos sin saber muy bien por qué. Por ejemplo, esta es la propiedad que nos permite calcular la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan que veremos en un par de secciones. Si tenemos una matriz A, que cumpla los requisitos necesarios para ser invertible, y le aplicamos las trasformaciones necesarias para transformarla en la matriz identidad I, entonces tenemos que $I = P\Delta A$, donde P es la matriz de paso anterior, pero que además, será la matriz inversa de A.

1.5.3. Método de Gauss.

El método de Gauss es un proceso algorítmico que nos permite hacer ceros en posiciones determinadas de una matriz a través de transformaciones elementales por filas o por columnas, obteniendo como resultado una matriz equivalente a la original. En particular, dada una matriz $A \in M_{m,n}(K)$, el método de Gauss nos va a permitir obtener una matriz escalonada equivalente a A (esta vez no necesariamente con pivote 1).

Ejemplo: Método de Gauss - ceros debajo de la diagonal principal.
Aplique el método de Gauss para conseguir ceros en todos los elementos debajo de la diagonal principal de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Método de Gauss - matriz escalonada y matriz de paso.
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

conseguir una matriz escalonada equivalente B y la correspondiente matriz de paso tal que $B = PA$.

1.5.4. Método de Gauss-Jordan.

El método de Gauss-Jordan es una extensión del método de Gauss, de forma que vamos a poder anular posiciones que quedan por encima del elemento principal (pivote) de una fila o columna. En particular, dada una matriz $A \in M_{m,n}(K)$, el método de Gauss-Jordan nos va a permitir obtener una matriz diagonal equivalente a la matriz A, y exigiendo que el pivote sea 1 obtendremos la forma escalonada reducida equivalente a A (forma normal de Hermite de A).

Ejemplo: Método de Gauss-Jordan - matriz diagonal.
Aplique el método de Gauss para conseguir una matriz diagonal equivalente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Método de Gauss-Jordan- forma normal de Hermite.
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

conseguir una matriz escalonada reducida equivalente H (forma normal de Hermite por filas) y la correspondiente matriz de paso tal que $H = PA$.

1.5.5. Rango y traza de una matriz.

El **rango** de una matriz $A \in M_{m,n}(K)$ es la cantidad de filas no nulas en su forma escalonada equivalente. Se suele denotar por $rg(A)$ o $R(A)$.

Ejemplo: cálculo del rango de una matriz.
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

determine su rango.

Nota: Para calcular el rango no se requiere que el pivote de cada fila de la matriz escalonada sea 1.

Ejemplo: rango dependiendo de los valores de un parámetro.
Determine el rango de A según los distintos valores del parámetro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & 4 & t \\ t & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: rango dependiendo de los valores de un parámetro.
Determine el rango de A según los distintos valores del parámetro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 2a & -1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades del rango.

- $rg(A) \leq min\{n, m\}$
- $|rg(A) - rg(B)| \leq rg(A + B) \leq rg(A) + rg(B)$.
- $rg(kA) = rg(A)$, con $0 \neq k \in K$.

La **traza** de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal principal. Se suele denotar por $tr(A) = \sum a_{ii}$.

Propiedades de la traza.

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
- $tr(kA) = ktr(A)$ con $k \in K$.
- $tr(AB) = tr(BA)$ cuando el producto tenga sentido.

1.6. Matriz inversa.

1.6.1. Inversas laterales.

Dada una matriz $A \in M_{mn}(K)$, diremos que $B \in M_{nm}(K)$ es una matriz **inversa a la derecha** de A si $AB = I_m$. Esta matriz inversa a la derecha existirá si y solo si $rg(A) = m$.

Ejemplo: Inversa a la derecha.
Dada la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

determine su matriz inversa a la derecha.

Dada una matriz $A \in M_{mn}(K)$, diremos que $B \in M_{mn}(K)$ es una matriz **inversa a la izquierda** de A si $BA = I_n$. Esta matriz inversa a la izquierda existirá si y solo si $rg(A) = n$.

Ejemplo: Inversa a la izquierda.
Dada la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

determine su matriz inversa a la izquierda.

Una matriz tiene inversa si tiene inversa a la derecha e inversa a la izquierda. Por lo tanto, una matriz tendrá inversa si es cuadrada y de rango máximo.

MUY IMPORTANTE: Una matriz es invertible si y solo si es cuadrada y de rango máximo.

1.6.2. Matrices cuadradas regulares.

Dadas $A, B \in M_n(K)$, se dice que B es **inversa** de A si $AB = BA = I$. Esta matriz B, en caso de existir, se denotará comumnente por A^{-1}. Esta relación es bidireccional, es decir, si B es la inversa de A, también A es la inversa de B, o lo que sería lo mismo, A y B son matrices inversas. Una matriz que tiene inversa se dice que es **invertible** o **regular**. Una matriz que no tiene inversa se dice que es **singular**. Para que una matriz sea invertible tiene que ser cuadrada y de rango máximo.

1.6.3. Propiedades de la matriz inversa.

- Si A es invertible, entonces es equivalente a la matriz identidad.
- Si A es invertible, entonces la inversa es única.
- Si A es invertible, entonces A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$
- Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Nota: Una vez formalizado el concepto de matriz inversa podemos redefinir el concepto de matrices equivalentes. Diremos que $A, B \in M_{m,n}(K)$ son matrices equivalentes si existen matrices invertibles $P \in M_m(K)$ y $Q \in M_n(K)$ tales que $B = PAQ$.

1.6.4. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.

Como hemos adelantado arriba, podemos utilizar las características de las matrices elementales y la relación que existe entre las transformaciones elementales y el producto de matrices para calcular la matriz inversa de una matriz dada. Para ello vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan.

Ejemplo: matriz inversa por Gauss-Jordan
Determine las matrices inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

1.7. Álgebra de matrices: ecuaciones y sistemas matriciales.

1.7.1. Ecuaciones matriciales.

Se pueden resolver, de foma muy sencilla, ecuaciones matriciales de tipo lineal, es decir, las equivalentes a $ax = b$. Sin embargo aquí hay que tener mucho cuidado con el producto de matrices, que como dijimos no es comnutativo, y recordemos que la división no existe como operación.

MUY IMPORTANTE: El producto de matrices no es comnutativo.
MUY IMPORTANTE: El equivalente a la división es el producto por la inversa.

Ejemplo: despejando en una ecuación matricial.
Despeje la matriz X en las siguientes ecuaciones,

1. $AX = B$
2. $XA = B$
3. $AX + BX = C$
4. $XA + XB = C$
5. $AX + XB = C$
6. $AX + X = B$
7. $AX + 2X = B$
8. $AX + BX + C = D$
9. $AX - BX - C = D$
10. $AX + B = CX - D$

1.7.2. Sistemas de ecuaciones matriciales.

Un sistema (lineal) de ecuaciones matricial va a ser de la forma

$$\left.\begin{array}{r} aX + bY = A \\ cX + dY = B \end{array}\right\}$$

donde X, Y, A, B son matrices y a, b, c, d son escalares (números comunes). Por lo tanto, el sistema se podrá resolver facilmente por el método de reducción.

Ejemplo: Ejemplo sistema de ecuaciones matriciales
Resuelve el siguiente sistema,

$$\left.\begin{array}{r} 2X-3Y=\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

1.8. Factorización LU.

La factorización LU es un proceso de descomposición de una matriz de forma que la expresamos como el producto de dos matrices trianguales. Trabajar con matrices triangulares es más sencillo que trabajar con matrices arbitrarias, esto hará que, en algunas situaiones, se aplique este método para resolver sistemas, calcular determinantes o determinar matrices inversas de forma más sencilla y a veces, más eficiente.

Toda matriz $A \in M_{mn}(K)$ se puede expresar de la forma $PA = LU$, donde $P \in M_m(K)$ es una matriz de permutación, $L \in M_m(K)$ es una matriz triangular inferior y $U \in M_{mn}(K)$ es una matriz escalonada.

El proceso de descomposición es análogo a la forma en que se aplica el método de Gauss para escalonar una matriz y tiene dos fases:

1. calculamos una matriz triangular inferior equivalente a PA de forma que $U = Q(PA)$,

2. calculamos la matriz inversa de Q obteniendo $L = Q^{-1}$. De esta forma $PA = Q^{-1}U = LU$.

.

Ejemplo: Factorización LU
Expresar
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$
como el producto de una matriz triangular inferior y otra matriz triangular superior.

La matriz de paso P en la igualdad $PA = LU$ es la que nos va a permitir encontrar dicha factorización para cualquier matriz, pues habrá ocasiones en las que no se pueda reducir la matriz A directamente.

Ejemplo: Factorización LU
Expresar
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$
como el producto de una matriz triangular inferior y otra matriz triangular superior.

1.9. Ejercicios resueltos.

.

Ejercicio 01:
Determine en función de los parámetros a, b, c el rango de la matriz,
$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$$

Ejercicio 02:
Determine los valores de a, b, c para que el rango de la matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{pmatrix}$$

sea 2.

Ejercicio 03:
Estudiar el rango de la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 04:
Demuestre que la siguiente matriz es invertible y calcule su inversa,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 05:
Determine los valores de a para que a matriz,

$$\begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-2 & a^2-2a \\ 1 & a^2 & -1 \\ 2-a & 4-2a & a-2 \end{pmatrix}$$

sea invertible. Estudie los casos en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}_7$.

Ejercicio 06:
Dadas las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}$$

calcular A^{-1}.

Ejercicio 07:
Dada la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

calcular $I + A + A^2 + A^3 + ... + A^n + ...$

Ejercicio 08:
Dada la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular A^n.

Capítulo 2

Determinantes

2.1. Definición e interpretación: qué es, cómo se interpreta, de dónde surge, para qué sirve.

Qué es: Un determinante es un número que se obtiene a partir de una matriz cuadrada operando sus elementos de una forma concreta. Por eso se dice que un determinante es una función que relaciona a una matriz con un número.

De dónde surge: Surge de la necesidad de saber si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución o no la tiene. Aunque no lo creas, el concepto de determinate surge antes que el concepto de matriz. Cuando nosotros estamos resolviendo un sistema de ecuaciones lineales (por el método de Gauss) los coeficientes de este sistema se combinan entre sí de una forma concreta. Pues bien, esta forma en que se combinan es exactamente igual a la forma en que combinamos los elementos de una matriz en el cálculo de un determinante. Un determinante es eso, la forma en que se combinan los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales al escalornarlo por medio de transformaciones elementales de Gauss. Cuando los coeficientes del sistema se representan en forma matricial y se hacen esas mismas transformaciones a la matriz surgen, de forma natural, las operaciones concretas que hoy relacionamos con el cálculo del determinante de una matriz.

Para qué sirven: Para resolver sistemas de ecuaciones lienales (Regla de Cramer), para calcular áreas y volúmenes en geometría (producto vectorial y producto mixto de vectores), para estudiar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores (estudiando el rango de la matriz que definen) y para clasificar matrices (la clasificación de matrices permite clasificar formas cuadráticas en álgebra, cónicas y cuádricas en geometría y la curvatura de una superficie en cálculo).

Vídeo externo: Determinantes - qué son, cómo se interpretan, para qué sirven.

Vídeo externo: ¿Por qué... un determinante se calcula de esta manera?

2.2. Vocabulario básico.

Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, denotaremos por $|A|$ o por $det(A)$ al determinante de A, es decir,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.2.1. Menor.

Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, un **menor de orden** k de A es el determinante de una submatriz cuadrada de A de tamaño k obtenida mediante la eliminación de $n-k$ filas y columnas.

2.2.2. Menor principal.

Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, un **menor principal de orden** k de A es el determinante de una submatriz cuadrada de A de tamaño k obtenida mediante la eliminación de las últimas $n-k$ filas y columnas. Se suele denotar, en el contexto adecuado, por m_k.

2.2.3. Menor complementario.

Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, el **menor complementario** del elemento a_{ij} es el determinante de la submatiz cuadrada de A de tamaño

$n-1$ obtenida eliminando la fila i-ésima y la columna j-ésima, es decir, la fila y la columna que contienen al propio a_{ij}. Se suele denotar, en el contexto adecuado, por m_{ij}.

2.2.4. Adjunto.

Sea la matriz $A=(a_{ij})\in M_n(K)$, el **adjunto del elemento** a_{ij} (a veces llamado cofactor), que denotaremos aquí por d_{ij}, es $d_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij}$, donde m_{ij} es el menor complementario del elemento a_{ij}.

2.2.5. Matriz de adjuntos.

La **matriz de adjuntos** de la matriz $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ es la matriz formada por los adjuntos de todos los elementos de A, es decir, $Adj(A)=(d_{ij})\in M_n(K)$.

Propiedad: $Adj(A^t)=(Adj A)^t$

2.3. Propiedades de los determinantes.

En lo que sigue denotamos las matrices $A,B\in M_n(K)$, y el escalar $k\in K$, y llamaremos F_i y C_i las distintas filas y columnas, respectivamente de la matriz A, es decir,

$$A=\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_n\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n\end{pmatrix}$$

Se cumple que,

1. Si una fila o una columna de una matriz se multiplican por un escalar k, el determinante queda multiplicado por dicho número,

$$|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & kF_p & \dots & F_n\end{pmatrix}^t|=k|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_p & \dots & F_n\end{pmatrix}^t|$$

$$|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & kC_p & \dots & C_n\end{pmatrix}|=k|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p & \dots & C_n\end{pmatrix}|$$

2. Si multiplicamos una matriz A por un escalar k, entonces el determimante queda multiplicado por k^n, siendo n el orden de la matriz, $|kA| = k^n|A|$.

3. Si una fila o una columna de una matriz se descompone en dos sumandos, el determinante de dicha matriz coincide con la suma de los determinantes de dos nuevas matrices, donde cada una contiene a uno de estos sumandos,

$$\begin{array}{l} |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_p + F'_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = \\ = |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| + |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F'_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p + C'_p & ... & C_n \end{pmatrix}| = \\ = |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p & ... & C_n \end{pmatrix}| + |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C'_p & ... & C_n \end{pmatrix}| \end{array}$$

MUY IMPORTANTE: cuidado!! con sumas en varias filas/columnas. Hay que tener en cuenta todas las posibles combinaciones de sumandos. Por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 + F'_2 & F_3 + F'_3 \end{pmatrix}^t| & \neq & |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}^t| + |\begin{pmatrix} F_1 & F'_2 & F'_3 \end{pmatrix}^t| \\ |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 + F'_2 & F_3 + F'_3 \end{pmatrix}^t| & = & |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}^t| + |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F'_3 \end{pmatrix}^t| \\ & + & |\begin{pmatrix} F_1 & F'_2 & F_3 \end{pmatrix}^t| + |\begin{pmatrix} F_1 & F'_2 & F'_3 \end{pmatrix}^t| \end{array}$$

4. Si se permutan dos filas o columnas de una matriz, su determinante cambia de signo,

$$\begin{array}{l} |\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_p & ... & F_q & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = \\ = -|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & F_q & ... & F_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p & ... & C_q & ... & C_n \end{pmatrix}| = \\ = -|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_q & ... & C_p & ... & C_n \end{pmatrix}| \end{array}$$

5. Si una matriz tiene una fila o columna nula, su determinante vale 0,

$$|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ... & 0 & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = 0$$

$$|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & 0 & ... & C_n \end{pmatrix}| = 0$$

6. Si una matriz tiene dos filas iguales o porporcionales, entonces su determinante vale 0,

$$|\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & ...F_p & ... & kF_p & ... & F_n \end{pmatrix}^t| = 0$$

$$|\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & ... & C_p & ... & kC_p & ... & C_n \end{pmatrix}| = 0$$

7. Si una fila o columna de una matriz se puede obtener como combinación lineal de otras filas o columnas de esta misma matriz, entonces su determinante vale 0,

$$\left| \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & kF_p + tF_q & \dots & F_n \end{pmatrix}^t \right| = 0$$
$$\left| \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & kC_p + tC_q & \dots & C_n \end{pmatrix} \right| = 0$$

8. Si a una fila o columna le sumamos una combinación lienal de otras filas o columnas, el determinante no varía,

$$\left| \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_l + kF_p + tF_q & \dots & F_n \end{pmatrix}^t \right| = \left| \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_l & \dots & F_n \end{pmatrix}^t \right|$$
$$\left| \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_l + kC_p + tC_q & \dots & C_n \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_l & \dots & C_n \end{pmatrix} \right|$$

9. El determinante del producto de dos matrices coincide con el producto de los determinantes de cada una de las matrices,

$$|AB| = |A||B|$$

10. El determinante de la matriz inversa coincide con la inversa del determinante de la matriz,

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

11. El determinante de una matriz coincide con el determinante de su matriz traspuesta,

$$|A^t| = |A|$$

Ejemplo: determinante usando las propiedades.
Calcule los siguiente determinantes,

$$\begin{vmatrix} a & b+c & a+b+c \\ b & a+c & a+b+c \\ c & b+c & a+b+c \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \end{vmatrix}$$

Ejemplo: determinante usando las propiedades.
Sin desarrollar demuestre que,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo: determinante usando las propiedades.
Sabiendo que,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$$

determine el valor de,

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ b+1 & a+1 & c+1 \\ y/2+3b & x/2+3a & z/2+3c \end{vmatrix}$$

2.4. Cálculo del determinante.

2.4.1. Matrices de tamaño 1.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_1(K)$, entonces $A = (a_{11})$, y $|A| = a_{11}$.

2.4.2. Matrices de tamaño 2.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_2(K)$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2.4.3. Matrices de tamaño 3: Regla de Sarrus.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}) \end{array}$$

Ejemplo: cálculo de deerminantes ordenes pequeños.
Calcule el determinante de las siguientes matrices,

$$A = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.4. Matrices de tamaño n: desarrollo por adjuntos.

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{ij}$$

donde d_{ij} es el adjunto del elemento a_{ij}.

Ejemplo: cálculo de un determinante desarrollando por adjuntos.
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & -13 \end{vmatrix}$$

2.4.5. Matrices de tamaño n: reducción de orden.

El cálculo del determinante de una matriz de orden n puede resultar particularmente tedioso conforme el valor de n aumenta. Sin embargo, podemos utilizar las propiedades de los determinantes (en particular la propiedad 8 de nuestra lista) para conseguir ceros en todos los elementos de una fila o columna concreta menos en uno. Esto hará que el desarrollo por adjuntos se haga sobre un sólo elemento, reduciendo de esta manera en una unidad, el orden de la matriz a la que le tenemos que calcular el determinante.

IDEA CLAVE: Aplicamos transformaciones elementales al estilo de Gauss para hacer 0 en todos los elementos de una fila o una columna, menos en uno. Aplicamos el desarrollo por adjuntos sobre esa fila o esa columna. Así, reducimos el orden de la matriz en una unidad. Procedemos iterativamente hasta poder calcular el determinate.

CUIDADO: La forma efectiva de aplicar las transformaciones elementales de Gauss no es exactamente la misma que cuando estamos reduciendo una matriz para estudiar, por ejemplo, el rango. La propiedad 8 de los determinates nos prohibe multiplicar la fila que vamos a sustituir por un escalar, pues esto afectaría al resultado del determinate. Por lo tanto, si en la aplicación del método de Gauss estándar haríamos la transformación $F_i \to aF_i - bF_j$, cuando estamos calculando determinantes deberíamos hacer $F_i \to F_i - (b/a)F_j$.

Ejemplo: cálculo de un determinante por reducción de orden.
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & -13 \end{vmatrix}$$

2.4.6. Determinantes de Vandermonde.

Es el determinante de una matriz en la que cada fila (o columna) representa una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y de razón x_i. El interés recae en que el determinante de una matriz de esta forma se puede calcular de forma recursiva,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Ejemplo: Determinantes de Vandermonde.
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix}$$

2.5. Determinantes y matrices.

2.5.1. Rango de una matriz.

El rango de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ coincide con el tamaño de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo.

Ejemplo: cálculo del rango de una matriz.
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

determine su rango.

Ejemplo: rango dependiendo de los valores de un parámetro.
Determine el rango de A según los distintos valores del parámetro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & 4 & t \\ t & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2.5.2. Matriz inversa por adjuntos.

La matriz inversa de $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se puede determinar por medio de,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$$

Ejemplo: matriz inversa por adjuntos
Determine las matrices inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Vídeo externo: ¿Por qué... la inversa de una matriz se calcula así?

2.6. Ejercicios resueltos.

.

Ejercicio 01:
Calcule los siguientes determinantes,

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 02:
Calcule los siguientes determinantes,

$$a = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{vmatrix}$$

Ejercicio 03:
Calcule los siguientes determinantes,

$$a=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 9 \end{vmatrix}, \quad b=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 04:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & ... & 1 \\ n & 2 & 1 & ... & 1 \\ n & 1 & 3 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & & ... \\ n & 1 & 1 & ... & n \end{vmatrix}$$

Ejercicio 05:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & ... & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ... & 3n \\ ... & ... & ... & & ... \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & ... & n^2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 06:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & ... & a_n \\ ... & ... & ... & & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Ejercicio 07:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} a & 1b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Ejercicio 10:
Calcule el siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 11:
Determine en función de los parámetros a, b, c el rango de la matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12:
Determine los valores de a, b, c para que el rango de la matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{pmatrix}$$

sea 2.

Ejercicio 13:
Determine los valores de a para que a matriz,

$$\begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-2 & a^2-2a \\ 1 & a^2 & -1 \\ 2-a & 4-2a & a-2 \end{pmatrix}$$

sea invertible. Estudie los casos en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}_7$.

Ejercicio 14:
Estudiar el rango de la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15:
Demuestre que la siguiente matriz es invertible y calcule su inversa,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16:
Dadas las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}$$

calcular A^{-1}.

Capítulo 3

Sistemas lineales

3.1. Definición.

Sobre un cuerpo K se define una **ecuación lineal** con n incognitas sobre K a una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

donde cada a_i y b son elementos de K. A a_i se les llama **coeficientes** de la ecuación y a b **término independiente**.

Un **sistema de ecuaciones lineales** sobre un cuerpo K es una cantidad indeterminada m de estas ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +...+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +...+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +...+ & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right\}$$

Una ecuación lineal describe la relación lineal que hay entre una cantidad arbitraria de variables. Combinando varias de estas ecuaciones y formando un sistema podremos, en ocasiones, determinar un valor concreto para estas variables (solución del sistema). Esto es útil, no sólo para resolver problemas, sino que nos va a permitir generalizar el concepto de función, la estándar del estilo $f(x) = y$, a varias dimensiones (tanto en el conjunto de salida como en el de llegada), o en geometría, donde cada ecuación lineal con n variables se puede interpretar como un hiperplano en un espacio de dimensión n.

3.1.1. Expresión matricial de un sistema.

Denotando por,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

podemos expresar un sistema de ecuaciones lienales de la forma $AX = B$, donde A es la **matriz de coeficientes**, X la **matriz de incognitas**, y B la **matriz de términos independientes**. Una forma simplificada de representar un sistema es utilizando la **matriz ampliada** asociada al sistema,

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

3.1.2. Solución de un sistema de ecuaciones lineales.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales es una n-upla $(r_1, r_2, ..., r_n)$ que satisface todas las ecuaciones del sistema, es decir, que si $R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}^t$, entonces $AR = B$.

3.1.3. Sistema homogéneo.

Un sistema de ecuaciones lineales se dirá que es **homogéneo** si $B = 0$, es decir, será de la forma $AX = 0$. Un sistema homogéneo siempre tiene solución puesto que $X = 0$ es siempre solución trivial del sistema.

3.2. Clasificación de un sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener o no tener solución. En caso de tener solución se dice que el sistema es compatible. Si no tiene solución, entonces se dice que es incompatible. Un sistema de ecuaciones lineales compatible, puede tener solución única o puede tener infinitas soluciones. Si tiene solución única se dirá que el sistema es compatible determinado. En caso de tener infinitas soluciones, se dirá que es compatible indeterminado. Hay formas comunes de clasificar un sistema en cuanto a la cantidad de soluciones que tiene.

IDEA CLAVE:

- Sistema compatible determinado: tiene solución única.
- Sistema compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones.
- Sistema incompatible: no tiene solución.

3.2.1. Método de Gauss.

El método de Gauss para la discusión de un sistema consiste en decidir cómo son las soluciones de éste comparando la cantidad de ecuaciones (linealmente independientes) y la cantidad de incognitas que lo forman. Puesto que debemos estar seguros que comparamos ecuaciones independientes debemos trabajar sobre un sistema reducido. Por lo tanto, lo primero que debemos hacer es aplicar trasformaciones elementales de Gauss para encontrar la forma escalonada equivalente a la matriz ampliada asociada al sistema. Esto es equivalente a estudiar el rango de la matriz, por lo que no se va a requerir que los pivotes de la matriz escalonada sean 1. Esta forma escalonada puede ser de tres tipos,

Tipo I: Sistema compatible determinado (SCD)

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & ... & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & a_{22} & ... & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \widetilde{a}_{mn} & \widetilde{b}_m \end{array}\right)$$

Tipo II: Sistema compatible indeterminado (SCI)

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & ... & \widetilde{a}_{1k} & ... & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & a_{22} & ... & \widetilde{a}_{2k} & ... & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \widetilde{a}_{rk} & ... & \widetilde{a}_{rn} & \widetilde{b}_r \end{array}\right)$$

Tipo III: Sistema incompatible (SI)

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \ldots & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \widetilde{b}_m \end{array}\right)$$

Ilustramos con ejemplos numéricos. Dadas las matrices ampliadas asociadas a distintos sistemas de ecuaciones lineales,

$$(A_1|B_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \quad (A_2|B_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A_3|B_3) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (A_4|B_4) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

el sistema asociado a $(A_1|B_1)$ es compatible determinado, los sistemas asociados a $(A_2|B_2)$ y $(A_3|B_3)$ son compatibles indeterminados, y el sistema asociado a $(A_4|B_4)$ es incompatible.

Ejemplo: clasificación de un sistema - método de Gauss.
Clasifique, sin resolver, los sistemas,

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 3x & -y & +z & = & 5 \end{array}\right\}$$

3.2.2. Teorema de Rouche-Frobenius.

El teorema de Rouché-Fröbenius permite clasificar un sistema comparando los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada asociadas al sistema. Denotamos por A a la matriz de coeficientes, por $(A|B)$ a la matriz ampliada asociada al sistema, y n el número de incógnitas del sistema.

- El sistema será compatible determinado si y solo si $rg(A) = rg(A|B) = n$.
- El sistema será compatible indeterminado si y solo si $rg(A) = rg(A|B) < n$.
- El sistema será incompatible si y solo si $rg(A) \neq rg(A|B)$.

Para aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius tenemos que determinar los rangos de la matriz de coeficientes A y de la matriz ampliada $(A|B)$ asociadas al sistema objetivo. Estos rangos se pueden estudiar utilizando el método de Gauss o utilizando determinantes.

Ejemplo: clasificación de un sistema - Teorema de Rouche-Frobenius / rango por Gauss.
Clasifique, sin resolver, los sistemas,

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 3x & -y & +z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Ejemplo: clasificación de un sistema - Teorema de Rouche-Frobenius / rango por determinantes.
Clasifique, sin resolver, los sistemas,

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 3x & -y & +z & = & 5 \end{array}\right\}$$

3.3. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

3.3.1. Ecuación matricial asociada.

Tomando $AX = B$ como la expresión matricial asociada al sistema de interes, podemos determinar X despejando directamente desde la ecuación matricial, obteniendo $X = A^{-1}B$. Nótese que la matriz A tiene que ser invertible.

Ejemplo: resolución de un SCD utilizando matriz inversa.
Resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right\}$$

3.3.2. Método de Gauss.

El método de Gauss para la resolución de sistemas consiste en encontrar un sistema equivalente al sistema original, a través de transformaciones elementales de Gauss por filas, que sea un sistema escalonado. El método de Gauss se puede aplicar en dos fases bien diferenciadas:

1. Reducción del sistema a un sistema escalonado; esto se puede hacer sobre el propio sistema o utilizando la matriz ampliada asociada al sistema.

2. Sustitución hacia atrás. Desde la última ecuación, vamos despejando cada variable y sustituyendo su valor en la ecuación anterior. Nótese que en caso de ser un SCI, la última ecuación tendrá variables libres que debemos transformar en parámetros.

.

Ejemplo: resolución de un SCD utilizando método de Gauss.
Resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Ejemplo: resolución de un SCI utilizando método de Gauss.
Resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} x & +3y & -z & t & = & 1 \\ -x & -3y & +2z & & = & 2 \\ x & +3y & & +2t & = & 4 \end{array}\right\}$$

3.3.3. Método de Gauss-Jordan.

El método de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas consiste en encontrar un sistema equivalente al sistema original, a través de transformaciones elementales de Gauss por filas, que sea un sistema escalonado reducido, es decir, que la matriz de coeficientes asociada al sistema transformado es la forma normal de Hermite por filas de la matriz de coeficientes original. Nos encontraremos con dos casos cuando encontramos el sistema reducido,

1. Si la matriz de coeficientes es la identidad (esto sucede para el caso de SCD), entonces la matriz de términos independientes son las soluciones del sistema.

2. Si la matriz de coeficientes tiene columnas extra (esto sucede para el caso de SCI), entonces las columnas no nulas representan variables libres que deben ser transformadas en parámetros.

Ejemplo: resolución de un SCD utilizando método de Gauss-Jordan.
Resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Ejemplo: resolución de un SCI utilizando método de Gauss-Jordan.
Resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} x & +3y & -z & t & = & 1 \\ -x & -3y & +2z & & = & 2 \\ x & +3y & & +2t & = & 4 \end{array}\right\}$$

3.3.4. Regla de Cramer.

La regla de Cramer permite resolver un sistema utilizando el cálculo de determinates. El valor de cada variable se puede determinar como,

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}$$

donde $|A|$ denota el determinate de la matriz de coeficientes y $|A_{x_i}|$ denota el determinante de la matriz en la que se ha sustituido la columna i-ésima relativa a los coeficientes de la variable x_i por la matriz de términos independientes. Nótese que para aplicar la regla de Cramer se requiere dividir entre $|A|$, por lo que este ha de ser no nulo, es decir, es necesario, de nuevo, que la matriz A sea invertible. No en vano, algunos textos llaman matriz de Cramer a una matriz que sea invertible, y dicen que el sistema $AX = B$ es un sistema de Cramer cuando A es invertible.

Ejemplo: resolución de un SCD utilizando la regla de Cramer.
Resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Existe una extensión de la regla de Cramer que va a permitir resolver sistemas compatible indeterminados. Esta extensión consiste en traducir a parámetros las variables libres del sistema (que vendrán determinadas a partir del rango de la matriz de coeficientes) y aplicar la regla de Cramer sobre las ecuaciones del sistema que son linealmente independientes.

Ejemplo: resolución de un SCI utilizando la regla de Cramer extendida.
Resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} x & +3y & -z & t & = & 1 \\ -x & -3y & +2z & & = & 2 \\ x & +3y & & +2t & = & 4 \end{array}\right\}$$

3.3.5. Factorización LU.

Sea A la matriz de coeficientes del sistema $AX = B$ que está representado en forma matricial. Si descomponemos la matriz A de la forma $A = LU$ donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior, entonces $AX = B$ se transforma en $LUX = B$. Si llamamos $Y = UX$ obtenemos el sistema $LY = B$ que es sencillo de resolver para Y puesto que la matriz L es triangular. Una vez conocemos los valores de Y que satisfacen $LY = B$ los podemos utilizar para resolver un segundo sistema $Y = UX$ donde ahora las incognitas son las de la matriz X, y una vez encontrada esta solución, habremos resuelto el sistema original $AX = B$.

Ejemplo: resolución de un SCD utilizando factorización LU.
Resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right\}$$

3.4. Ejercicios resueltos.

Ejercicio 01:
Discuta y resuelva el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcr} x+2y+3z+4t &=& 10 \\ 4x+3y+2z+t &=& 10 \\ 7x+4y+z &=& 10+2t \\ 3x+y &=& z+3t \end{array}\right\}$$

Ejercicio 02:
Discuta y resuelva, en función del parámetro, el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+(b+1)z &=& 1 \\ x+(b+1)y+z &=& b \\ (b+1)x+y+z &=& b+5 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 03:
Discuta y resuelva, en función de los parámetros, el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcr} ax+bz &=& 1 \\ ax+cz &=& 0 \\ bx+cy &=& 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 04:
Discuta y resuelva, en función de los parámetros, el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcr} x+2y+z &=& 2 \\ x+y+2z &=& 3 \\ x+3y+az &=& 1 \\ 2x+3y+3z &=& b \end{array}\right\}$$

Ejercicio 05:
Discuta, en función de los parámetros, el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+abz & = & b \\ ax+y+bz & = & 1 \\ x+ay+bz & = & 1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 06:
Discuta, en función del parámetro, el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcr} (1-a)x+(2a+1)y+(2a+2)z & = & a \\ ax+ay & = & 2a+2 \\ 2x+(a+1)y+(a-1)z & = & a^2-2a+9 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 07:
Discuta, en función del parámetro, el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+1)x+y+z & = & a^2+3a \\ x+(a+1)y+z & = & a^3+3a^2 \\ x+y+(a+1)z & = & a^4+3a^2 \end{array}\right\}$$

Capítulo 4

Espacios vectoriales

4.1. Definición.

Un K-**espacio vectorial** (o espacio vectorial sobre K) es una terna $(V, +, \cdot)$ donde V es un conjunto no vacío, $+$ es una operación interna en V, que llamaremos suma, y $\cdot$ es una operación externa sobre V con elementos en el cuerpo K y que llamamos producto, y tales que cumplen:

1. La suma es asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todo $u, v, w \in V$.
2. La suma es conmutativa: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$.
3. La suma tiene elemento neutro: existe $0_V \in V$ tal que $0 + u = u$ para todo $u \in V$. A este elemento lo llamamos vector nulo o vector cero.
4. Todo elemento de V tiene un elemento opuesto: existe $u' \in V$ tal que $u + u' = 0_V$ para todo $u \in V$. El opuesto es único y lo denotamos por $-u$.
5. El producto es distributivo respecto a la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ para todo $u, v \in V$ y cualquier $\alpha \in K$.
6. El producto es distributivo respecto a la suma de escalares: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ para todo $u \in V$ y cualquier $\alpha, \beta \in K$.
7. El producto es semi-asociativo: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ para todo $u \in V$ y cualquier $\alpha, \beta \in K$.
8. El producto tiene elemento neutro: $1u = u$ para todo $u \in V$ siendo 1 el elemento neutro del producto en K.

A los elementos de V los llamamos vectores y a los elementos de K los llamamos escalares.

4.2. Espacios vectoriales notables.

4.2.1. Un cuerpo K sobre sí mismo.

Sea K un cuerpo cualquiera con la suma y el producto usual. Entonces K es un K-espacio vectorial.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

4.2.2. Un cuerpo K sobre otro cuerpo K'.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

4.2.3. K^n es un K-espacio vectorial.

Si definimos $K^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\ x_i \in K\}$ y las operaciones suma y producto,

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$k(x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$$

entonces K^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Ejemplo: Si $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces K^n es un espacio vectorial.

4.2.4. $M_{nm}(K)$ es un K-espacio vectorial.

Definimos $M_{nm}(K)$ como el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times m$ con coeficientes en el cuerpo K y las operaciones $+$ y $\cdot$ como la suma y el producto por escalares usuales en matrices. Entonces, $M_{nm}(K)$ es un K-espacio vectorial.

Ejemplo: Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo, $M_{nm}(K)$ es un K-espacio vectorial.

4.2.5. $K_n[x]$ es un K-espacio vectorial.

Defimos $K_n[x]$ como el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en el cuerpo k, y las operaciones $+$ y $\cdot$ como,

$$\begin{aligned}(a_0+a_1x \quad &+ \quad a_2x^2+...+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n)=\\ &= \quad (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+...+(a_n+b_n)x^n\end{aligned}$$

$$k(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)=(ka_0)+(ka_1)x+(ka_2)x^2+...+(ka_n)x^n$$

entonces $K_n[x]$ con estas operaciones es un K-espacio vectorial.

Ejemplo: Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo, $K_n[x]$ es un K-espacio vectorial.

4.2.6. $\mathcal{F}(S,K)=\{f:S\to K\}$ es un K-espacio vectorial.

Definimos $\mathcal{F}(S,K)=\{f:S\to K\}$ como el conjunto de todas las aplicaciones de S en K, y las operaciones $+$ y $\cdot$ como,

$$(f+g)(s)=f(s)+g(s)$$

$$(kf)(s)=kf(s)$$

entonces $\mathcal{F}(S,K)$ con estas operaciones es un K-espacio vectorial.

Ejemplo: Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo, $\mathcal{F}(S,K)$ es un K-espacio vectorial.

4.3. Vocabulario básico.

4.3.1. Combinación lineal.

Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ vectores del K-espacio vectorial V. Se dice que el vector $u \in V$ es una combinación lineal de estos n vectores si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ de forma que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$. A los escalares α_i los llamamos coeficientes de la combinación lineal.

4.3.2. Dependencia/independencia lineal.

Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ vectores del K-espacio vectorial V, se dirá que estos n vectores son linealmente independientes si el único valor que pueden tomar los coeficientes de la combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, es $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. En otro caso, se dirá que los vectores son linealmente dependientes, es decir, en este caso existirá algunos coeficientes $\alpha_i \neq 0$ tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$. A un conjunto de vectores linealmente independientes se les denomina (a veces) conjunto libre de vectores.

Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y sólo si uno de ellos se puede obenter como una combinación lineal de los restantes.

Ejemplo: Independencia lineal.
Dados los vectores $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ y $v_3 = (3, 2, 2, 3)$, comprobar si son linealmente independientes.

Ejemplo: Independencia lineal.
Dados los vectores $v_1 = (1, 1, 0, m)$, $v_2 = (3, -1, n, -1)$ y $v_3 = (-3, 5, m, -4)$, estudiar para que valores de m y n son linealmente dependientes. En ese caso expresar v_3 como combinación lineal de v_1 y v_2.

Resultados importantes:

- Si $0 \in S$ entonces S es linealmente dependiente.
- $\{u\}$ es linealmente independiente si y silo si $u \neq 0$.
- Si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente, cualquier ampliación $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+k}\}$ es linealmente dependiente.

- Si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+k}\}$ es linealmente independiente, entonces cualquier reducción $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente.

4.4. Sistemas generadores y bases.

Si S es un subconjunto no vacio de un K-espacio vectorial V, entonces, el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S, que denotaremos por $\langle S\rangle$, es un subespacio vectorial de V, y además, es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S. Además, se dice que S es un sistema generador (o sistema de generadores) de V si $\langle S\rangle = V$. Diremos que S es un sistema generador de un subespacio vectorial U de V, si $\langle S\rangle = U$.

Una base de un espacio vectorial es un sistema generador en el que todos los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo: Base.
Comprobar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^3$ y señalar cuáles son una base,

1. $\{(1,2),(1,0),(0,1)\}$
2. $\{(1,2,1),(1,0,1),(2,3,2)\}$
3. $\{(1,0,0),(2,1,1),(0,1,1),(1,-1,-1)\}$
4. $\{(1,0,0,1),(2,1,1,1),(0,1,1,0),(1,-1,-1,2)\}$
5. $\{(1,0,0,1),(0,1,1,1),(1,1,1,2),(1,-1,-1,2)\}$

Resultados importantes:

- Si S es un conjunto linealmente independiente de vectores y $u \notin S$, entonces $S \cup \{u\}$ también es un conjunto de vectores lienalemente independientes.
- Todo espacio vectorial no nulo tiene una base.
- (Steinitz) Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ son una base del espacio vectorial V, y $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes con $m \leq n$, entonces se pueden sustituir m vectores de la base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ por los vectores $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ obteniendose una nueva base.

- Todo conjunto de vectores linealmetne independiente puede completarse a una base.

- Todas las bases de un espacio vectorial finitamente generado no nulo tienen el mismo número de elementos.

- Si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es sistema generador de V y v_i es combinación lineal de los demás vectores, entonces $\{v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n\}$ también es sistema generador.

Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita y no nulo, se llamará dimensión de V, y lo denotaremos por $dim_K(V)$ o por $dimV$ cuando esté claro el contexto, a la cantidad de vectores que conforman cualquier base de V. Si $V = 0$ diremos que $dimV = 0$. Si V no tiene dimensión finita, diremos que tiene dimensión infinita, $dimV = \infty$.

Si $U \neq 0$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial V, entonces $dimU \leq dimV$, y además $dimU = dimV \Leftrightarrow U = V$.

Llamaremos rango del conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ del espacio vectorial V, a la dimensión del subespacio vectorial generado por ellos.

4.5. Matriz de cambio de base.

Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, se llaman coordenadas de un vector $v \in V$ con respecto a la base $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ a la única n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ tal que $v = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$. Se representa $v_\beta = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ejemplo: coordenadas de un vector respecto a una base.
Expresar el vector $(1, 2, 3)$ en coordenadas de la base

$$\beta = \{(1, -1, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 4)\}$$

Sean $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ y $\beta_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dos bases del K-espacio vectorial V. Las ecuaciones que nos permiten obtener cualquier vector que esté expresado en cordenadas de la base β_1, w_{β_1}, como un vector expresado en coordenadas de la base β, w_β, se llaman ecuaciones del cambio de base de β_1 a β. Supongamos que $w_\beta = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y que $w_{\beta_1} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, entonces

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & +...+ & a_{1n}y_n & = & x_1 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & +...+ & a_{2n}y_n & = & x_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & + & a_{n2}y_2 & +...+ & a_{nn}y_n & = & x_n \end{array}\right\}$$

donde $v_{j_\beta} = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$. A partir de la expresión matricial de este sistema obtenemos la matriz de cambio de base de β_1 a β,

$$M_{\beta\beta_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Importante: $M_{\beta_1\beta} = M^{-1}_{\beta\beta_1}$.

Ejemplo: construir matriz de cambio de base.
Dadas las bases

$$\beta_1 = \{(1,-1,2),(0,1,1),(1,0,4)\}$$

$$\beta_2 = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,0)\}$$

determinar $M_{\beta_1\beta_2}$

4.6. Subespacios vectoriales.

Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto no vacio U de V se dice que es un subespacio vectorial de V si cumple las dos condiciones siguientes:

1. Si $u, v \in U$, entonces $u+v \in U$ (U es cerrado para la suma de vectores).
2. Si $u \in U$, y $\alpha \in K$, entonces $\alpha u \in U$ (U es cerrado para el producto por escalares).

Estas dos condiciones se pueden aunar en una sóla,

- Si $u, v \in U$, y $\alpha, \beta \in K$, entonces $\alpha u + \beta v \in U$ (U es cerrado para combinaciones lineales).

.

Ejemplo: subespacio vectorial por definición.
Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$,

1. $A = \{(3x, x, x + y, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 \cdot x_2 = 0\}$
3. $C = \{(1, x, 1, x)|x \in \mathbb{R}\}$
4. $D = \{(x, x, x, x)|x \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$

Un subespacio vectorial puede expresarse de distintas forma: como el subespacio generado por un conjunto de vectores, como el subespacio generado por una base, como el conjunto de soluciones de una ecuación en forma general o paramétrica. En cualquier caso, y sean cuales sean los datos, debemos ser capaces de obtener una base y las ecuaciones general y paramétrica de dicho subespacio.

4.6.1. Subespacio generado por un conjunto de vectores.

Dado el conjunto generador obtendrémos una base quedandonos con un subconjunto que sea linealmente independiente. Desde este subconjunto de vectores crearémos la ecuación paramétrica de forma inmediata y a partir de esta, la forma geneneral.

4.6.2. Ecuaciones de un subespacio vectorial.

Todo subespacio vectorial U de un espacio vectorial V de dimensión finita puede ser interpretado como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, el que expresa un vector arbitrario $u \in U$ como combinación lineal de los elementos de una base β de U, $\beta_U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$,

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$$

Esta es la ecuación paramétrica del subespacio U. Cualquier sistema homogéneo que tenga como solución esta ecuación se llamará ecuación cartesiana, genral o implicita del subespacio U.

La cantidad de ecuaciones cartesianas necesarias para representar un subespacio vectorial U de V serán $dim(V) - dim(U)$.

Ejemplo: dado un sistema generador obtener una base y las ecuaciones del subespacio.
Sea

$$S =< (1,2,3,4,5),(2,3,4,5,1),(3,4,5,1,2),(0,1,2,8,4),(1,1,1,3,2) >$$

obtener para S una base y sus ecuaciones general y paramétrica.

Ejemplo: obtener una base a partir de las ecuaciones de un subespacio.
Sea

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)|x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, x_3 - x_4 - 2x_5 = 0\}$$

obtener para S una base.

4.6.3. Espacio de filas y espacio de columnas de una matriz.

Dada una matriz $A \in M_{mn}(K)$, llamamos espacio de filas y lo denotamos por $\mathcal{F}(A)$ al espacio generado por las filas de la matriz A. De la misma forma, llamamos espacio de columnas y lo denotamos por $\mathcal{C}(A)$, al espaco generado por las columnas de A.

Ejemplo: espacio de filas/columnas de una matriz.
Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular las ecuaciones implicitas del subespacio de filas y del subespacio de columnas de A.

4.6.4. Subespacio intersección.

Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V, entonces $U_1 \cap U_2$ es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo: obtener una base a partir de las ecuaciones de un subespacio.
Sean

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, x_3 - x_4 - 2x_5 = 0\}$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, x_3 - x_4 - 2x_5 = 0\}$$

obtener $S_1 \cap S_2$.

Clave: El subespacio intersección se puede determinar de forma sencilla a partir del sistema formado por las ecuaciones cartesianas de los dos subespacios.

4.6.5. Subespacio suma. Suma directa.

Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V, entonces $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a U_1 y U_2. A este subespacio se le denomina suma de U_1 y U_2. $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$. Esta suma se dirá que es suma directa, y la denotaremos por $U_1 \oplus U_2$ si además sucede que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Ejemplo: obtener una base a partir de las ecuaciones de un subespacio.
Sean

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, x_3 - x_4 - 2x_5 = 0\}$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, x_3 - x_4 - 2x_5 = 0\}$$

obtener $S_1 \cup S_2$.

Clave: El subespacio suma se puede obtener a partir del sistema generador formado por la unión de los vectores de las bases de los dos subespacios vectoriales.

4.6.6. Fórmula de Grassmann.

Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V de dimensión finita, entonces

$$dim(U_1) + div(U_2) = dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2)$$

4.6.7. Espacio cociente.

Sean V un K-espacio vectorial y U un subespacio vectorial de V. Se dice que $v_1, v_2 \in V$ están relacionados módulo U si $v_2 - v_1 \in U$. Entonces V/U es un K-espacio vectorial con las operaciones $+$ y $\cdot$,

$$[u] + [v] = [u + v]$$

$$k[u] = [ku]$$

y lo llamamos espacio vectorial cociente de V por U. Además,

$$dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$$

Ejemplo: subespacio cociente.
Sean el subespacio vectorial de $(R)^3$,

$$U = \{(x, y, z)|x + y + z = 0\}$$

Determinar si las siguientes parejas de vectores determinan la misma clase de equivalencia,

- $u = (0, 1, 3)$ y $v = (1, 1, 2)$,
- $u = (1, 1, 1)$ y $v = (2, 1, 0)$.

Determine una base del espacio cociente $(R)^3/U$ y calcule las coordenadas del vector $w = (1, 2, 3)$ en dicha base. obtener $S_1 \cup S_2$.

4.7. Ejercicios resueltos.

.

Ejercicio 01:
Sea el subespacio vectorial $S \subset \mathbb{R}^4$ de base $\beta_S = \{(1,0,2,1),(1,1,-1,-1)\}$

1. Determine la dimensión de S.
2. Estudie para qué valores de a, $(2,a,1,0) \in S$.
3. Halle las ecuaciones implicitas de S.

Ejercicio 02:
Dados los subespacios U y V de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x,y,z,t)|2x+2y-z=0, x+3y+t=0\}$$

$$V = \{(x,y,z,t)|3x+y-5t=0, x+z-4t=0\}$$

1. Encuentre una base y unas ecuaciones del subespacio $U+V$.
2. Determine k para que $(2,k,2,1) \in U+V$.
3. Para dicho valor de k determine las coordenadas de $(2,k,2,1)$ en la base hallada en el apartado 1.

Ejercicio 03:
Dados los subespacios U y V de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x, y, z, t)|5x + z = 2y + t, 2x + t = 3y\}$$

$$V =< (1, 0, 1, 0), (2, 0, a, -1) >$$

1. Halle una base de U.
2. Determine a para que NO se cumpla $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.
3. Para dicho valor de a calcule bases para $U + V$ y $U \cap V$.

Ejercicio 04:
Dados los subespacios U y V de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x, y, z, t)|x + y - z - t = 0, x - y - z + t = 0\}$$

$$V =< (0, 1, 2, 3), (3, 2, 1, 0) >$$

1. Halle una base y unas ecuaciones para $U + V$.
2. Halle una base y unas ecuaciones para $U \cap V$.
3. Para dicho valor de a calcule bases para $U + V$ y $U \cap V$.

Ejercicio 05:
Extienda el conjunto de vectores $V = \{(1, -2, 0, 1), (4, 2, 2, 1), (5, 4, 3, 2)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$ utilizando un vector de la base canónica.

Ejercicio 06:
En el subespacio $\mathbb{R}_4[x]$ de los polinomios de grado ≤ 4 se consideran los subespacios

$$U =< x(x+1)(x^2+1), (x+1)^3, (x+1)^2 >$$

$$V =< x^4-1, x(x+1)(x-1), (x+1)(x^3+1) >$$

encuentre una base del subespacio $U \cap V$ y determine cuál de los polinomios está en él: $p(x)x^2$ y/o $q(x) = (x+1)(x^3-1)$.

Ejercicio 07:
En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado ≤ 3 se considera el subespacio

$$U = \{p(x)|p(2) = p(3) = 0\}$$

Determine su dimensión y una base.

Ejercicio 08:
En el K-espacio vectorial K^4 se sabe que en el subespacio $V =< v_1, v_2, v_3 >$, v_1 y v_2 no son proporcionales y que el subespacio W está generado por una única ecuación implicita. Demuestre que $V \cap W \neq 0$.

Ejercicio 09:
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ decida si las siguientes funciones son linealmente independiente: $f(x) = 1$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = 2^{-x}$.

Ejercicio 10:
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales, se pide

1. Estudie si el conjunto $S = \{x^3 - x + 1, x^2 - x, 3\}$ es linealmente independiente.
2. Ampliar S hasta una base de $\mathbb{R}_3[x]$.
3. Escribir las coordenadas del vector $x^3 + x^2 + x + 1$ en la base obtenida en el apartado 2.

Ejercicio 11:
Sea U el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$. Determinar su dimensión.

Ejercicio 12:
Sea U el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$. Determinar su dimensión y una base.

Ejercicio 13:
Sean
$$U =< (1, 1, \alpha), (\alpha, 1, 1) >$$
$$V =< (-1, \alpha, -1), (1, 1, 1) >$$
. Calcular la dimensión de $U \cap V$ según los valores de α.

Capítulo 5

Espacio vectorial euclídeo

5.1. Introducción.

Un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial que desde una interpretación geométrica satisface los axiomas de Euclides de la geometría clásica. Para definir este tipo de espacio vectorial vamos a necesitar trabajar con un espacio vectorial real y dotarlo de una unidad de medida (una norma) a través del producto escalar.

5.2. Producto escalar.

El **producto escalar** sobre un K-espacio vectorial V es una aplicación

$$<,>: V \times V \to K$$

que verifica,

- $< u, v > = < v, u >$ para todo $u, v \in V$.
- $< u + w, v > = < u, v > + < w, v >$ para todo $u, v, w \in V$.
- $< ku, v > = k < u, v >$ para todo $u, v \in V$ y $k \in K$.
- $< u, u > \geq 0$ para todo $u \in V$. $< u, u > = 0$ si y solo si $u = 0$.

Un **espacio vectorial euclídeo** es un par $(V, <, >)$ formado por un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V y un producto escalar definido en él. Sobre un mismo espacio vectorial, distintos productos escalares darán lugar a distintos espacios vectoriales euclídeos.

5.3. Forma matricial del producto escalar. Matriz de Gram.

Dado un espacio vectorial euclídeo $(V,<,>)$ de dimensión finita y $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de V. Llamamos **matriz de Gram** (matriz métrica) respecto a la base β a la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde $a_ij =< v_i, v_j >$. Esta matriz es simétrica y nos permite definir el producto escalar de forma matricial,

$$< x, y >= X^t AY$$

5.4. Definiciones.

Dado un espacio vectorial euclídeo $(V,<,>)$, se define la **norma** (módulo) de un vector $u \in V$ como $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$

La norma tiene las siguientes propiedades,

- $\|u\| \geq 0$.
- $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$.
- $\|au\| = |a|\|u\|$.
- $| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\|\|y\|$.

Llamaremos **ángulo** entre los vectores x e y al único número real α, $0 \leq \alpha \leq \pi$, que

$$\cos(\alpha) = \frac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}$$

Dos vectores $x, y \in V$ son ortogonales, y se denota por $x \perp y$, si $< x, y >= 0$.

5.5. Base ortogonal. Base ortonormal.

Dados un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ de dimensión finita y $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de V. Se dice que β es una **base ortogonal** si los vectores que la forman son ortogonales dos a dos, es decir, $< v_i, v_j >= 0$ para todo $i \neq j$. Se dirá que es una **base ortonormal** si además todos los vectores tienen norma 1, es decir, $\|v_i\| = 1$.

Resultados importantes:

- La base β es ortogonal si y solo si la matriz de Gram respecto de esta base es diagonal.
- La base β es ortonormal si y solo si la matriz de Gram respecto de esta base es la identidad.
- La matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales es una matriz ortogonal. Verifica, $P^t = P^{-1}$.
- Todo vector $x \in V$ verifica que $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{<x,v_i>}{\|v_i\|^2} v_i$. Los coeficientes de esta combinación lineal se conocen como coeficientes de Fourier de x en la base β.

5.5.1. Construcción de una base ortogonal.

Vídeo: construcción de una base ortogonal.

5.5.2. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Dados un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ de dimensión finita y $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, queremos encontrar una base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ ortogonal de V. Se procede de forma iterativa,

1. $u_1 = v_1$.
2. $u_2 = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{\|u_i\|^2} u_1$.
3. $u_3 = v_3 - \frac{<v_3,u_2>}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{<v_3,u_1>}{\|u_i\|^2} u_1$.
4. ...

Si queremos que esta base sea ortonormal, entonces dividimos cada vector entre su norma.

Vídeo: Cálculo de una base ortogonal-Gram Schmidt.

5.5.3. Proyección ortogonal.

Dados un espacio vectorial euclídeo $(V, <, >)$ de dimensión finita y U un subespacio de V, llamamos **complemento ortogonal** de U al conjunto

$$U^{\perp} = \{x \in V | x \perp U\}$$

. Este conjunto es un subespacio vectorial de V y además $V = U \oplus U^{\perp}$ con $dim(U^{\perp}) = dim(V) - dim(U)$.

Dados un espacio vectorial euclídeo $(V, <, >)$ de dimensión finita y U un subespacio de V. Todo vector $x \in V$ puede escribirse de forma única como suma de un vector en U y otro vector en $U^{\perp}$, es decir, $x = u + v$ con $u \in U$ y $v \in U^{\perp}$. Diremos que u es la proyección ortogonal de x sobre U, y lo denotaremos por $p_U(x)$. Análogamente, v es la proyección ortogonal de x sobre $U^{\perp}$, y lo denotaremos por $p_{U^{\perp}}(x)$.

Vídeo: Cálculo de la proyección ortogonal.

5.6. Ejercicios resueltos.

.

Capítulo 6

Aplicaciones lineales

6.1. Definición de aplicación lineal.

Sean U y V dos K-espacios vectoriales. Se dice que la aplicación $f : U \to V$ es una aplicación lineal (homomorfismo de espacios vectoriales), si cumple:

1. $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$, para cualquier $u_1, u_2 \in U$.

2. $f(ku) = kf(u)$ para todo $u \in U$ y todo $k \in K$.

Estas dos condiciones se pueden aunar en la siguiente,

- $f(k_1u_1+k_2u_2) = k_1f(u_1)+k_2f(u_2)$ para todo $u_1, u_2 \in U$ y todo $k_1, k_2 \in K$.

Idea clave: Una transformación lineal respeta las estructuras de un K-espacio vectorial.

.

Ejemplo: aplicación lineal por definición.
Estudiar cuáles de las siguientes son aplicaciones lineales,

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(v) = k_0v$ con $k_0 \in \mathbb{R}$ fijo.

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ siendo $f(x, y, z) = (x, 1, z)$.

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 0, 0)$-

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ siendo $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, z)$.

5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x, y, z) = (x - y, x + z)$.

6.1.1. Expresión analítica.

La expresión analítica de una aplicación lineal $f : U \to V$, entre los K-espacios vectoriales U y V, es aquella nos describe los vectores del espacio de llegada como la imagen de un vector en el espacio de salida, es decir, es de la forma $f(u) = v$ siendo $u \in U$ y $v \in V$. Se dice que v es la imagen del vector u por medio de f, o que u es la antiimagen de v por medio de f.

Nota: Las aplicaciones descritas en el ejemplo anterior están expresadas en forma analítica.

6.1.2. Expresión matricial.

Si tenemos una aplicación lineal $f : U \to V$ entre los K-espacios vectoriales U y V con bases $\beta_U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, entonces sucede que $f(u_i)$ es combinación lineal de elementos de la base β_V, es decir, para todo $u_i \in \beta_U$ existen $a_{ij} \in K$ de forma que

$$f(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + ... + a_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i,$$

lo que implica que para cualquier vector $u \in V$, que se podrá escribir de la forma $u = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n = \sum_{j=1}^{n} x_ju_j$, se tiene

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_ju_j) = \sum_{j=1}^{n} x_jf(u_j) = \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_ja_{ij})v_i = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_ja_{ij})v_i \end{aligned}$$

de donde tenemos que $u_{\beta_U} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $f(u)_{\beta_V} = (\sum_{j=1}^{n} x_ja_{1j}, \sum_{j=1}^{n} x_ja_{2j}, ..., \sum_{j=1}^{n} x_ja_{mj})$, por lo tanto, simplificando notación y llamando $f(u)_{\beta_V} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, tenemos que $y_i = \sum_{j=1}^{n} x_ja_{ij} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + ainx_n$ lo que da lugar a un sistema con n incognitas y m ecuaciones, que en forma matricial podemos expresar,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de donde,

$$M_{\beta_V \beta_U}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diremos que es la matriz de la aplicación lineal respecto de las bases β_U y β_V. A la expresión $f(u)_{\beta_V} = M_{\beta_V \beta_U}(f) u_{\beta_U}$ la llamamos expresión matricial de la aplicación lineal.

6.1.3. Resultados importantes.

- Dada una aplicación lineal $f : U \to V$, si U' es subespacio vectorial de U, entonces $f(U')$ es subespacio vectorial de V.

- Dada una aplicación lineal $f : U \to V$, si V' es subespacio vectorial de V, entonces $f^{-1}(V')$ es subespacio vectorial de U.

- Dada una aplicación lineal $f : U \to V$, si $\{u_1, ..., u_n\}$ es un sistema generador de U, entonces $\{f(u_1), ..., f(u_n)\}$ es un sistema generador de $Imgf$.

.

Ejemplo-imagen y antiimagen de un vector.
Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ las aplicaciones lineales dadas por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, z)$$

$$g(x, y, z) = (x - y, x + z)$$

y sean $V =< (1, -1, 0), (1, 1, 1) >$ y $W = \{(3\lambda, 2\lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Calcule

1. $f(V)$ y $g(V)$,

2. $f^{-1}(0, 0, 0)$ y $g^{-1}(2, 2, 1)$,

3. $f^{-1}(W)$.

6.2. Subespacios Núcleo e Imagen.

Dada una aplicación lineal $f : U \to V$, se define el **núcleo** de f y se denotará por $Nuc(f)$ o por $Ker(f)$, como el conjunto de todos los vectores del espacio de salida cuya imagen es el vector trivial del espacio de llegada,

$$Kerf = f^{-1}(0) = \{u \in U | f(u) = 0\}$$

Dada una aplicación lineal $f : U \to V$, se define la **imagen** de f y se denotará por $Img(f)$, como el conjunto de todos los vectores del espacio de llegada para los que existe una antiimagen,

$$Imgf = f(V) = \{v \in V | \exists u \in U \ f(u) = v\}$$

- $Imgf$ es subespacio vectorial de V.

- $Kerf$ es subespacio vectorial de U.

6.2.1. Ecuaciones.

El núcleo de una aplicación lineal $f : U \to V$, por definición, es el conjunto de vectores $u \in U$ tal que $f(u) = 0$, por lo tanto se pueden encontrar sus ecuacions resolviendo el sistema homogéneo.

La imagen de una aplicación lineal $f : U \to V$, por defininción, es el conjunto de vectores $v \in V$ para los que existe $u \in U$ con $f(u) = v$, por lo tanto se trata de encontrar condiciones sobre v para que el sistema propuesto sea compatible.

6.2.2. Dimensión y base.

El núclo y la imagen de una aplicación lineal $f : U \to V$ son subespacios vectoriales de U y V respectivamente, por lo tanto, el cálculo de las dimensiones y la base es equivalente a su análogo en espacios vectoriales.

6.3. Definiciones básicas.

6.3.1. Aplicación lineal inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Una aplicación lineal $f : U \to V$ es **inyectiva** si y solo si $Kerf = 0$.

Una aplicación lineal $f : U \to V$ es **sobreyectiva** (o suprayectiva) si y solo si $Img(f) = V$.

Una aplicaicón lineal $f : U \to V$ es **biyectiva** si y solo si es inyectiva y sobreyectiva.

Dada la aplicación lineal $f : U \to V$, si U es de dimensión finita, entonces $Kerf$ e $Imgf$ son de dimensión finita y además,

$$dimU = dim(Kerf) + dim(Imgf)$$

Dada la aplicación lineal $f : U \to V$, se llama **rango** de de f, $rang(f)$, a la dimensión de $Imgf$, es decir,

$$rang(f) = dim(Imgf)$$

Dada la aplicación lineal $f : U \to V$ con $dim(U) = dim(V)$ (ambas finitas), entonces f es inyectiva si y solo si f es sobreyectiva si y solo si f es biyectiva.

6.3.2. Isomorfismo, endomorfismo, automorfismo.

Una aplicación lineal $f : U \to V$ es **isomorfismo** de espacios vectoriales si es una aplicación biyectiva.

Una aplicación lineal $f : U \to U$ se dice que es un **endomorfismo** de un espacio vectorial U. Un endomorfismo biyectivo se dice que es **automorfismo**.

Dos espacios vectoriales se dicen que son isomorfos y se denota por $U \cong V$ si existe un isomorfismo entre ellos.

Sean U y V dos K-espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $U \cong V$ si y solo si $dim(U) = dim(V)$.

6.3.3. Operaciones.

Si tenemos dos aplicaciones lineales $f : U \to V$ y $g : V \to W$ con bases respectivas β_U, β_V y β_W, entonces

$$M_{\beta_W \beta_U}(g \circ f) = M_{\beta_W \beta_V}(g) M_{\beta_V \beta_U}(f)$$

Una aplicación lineal $f : U \to V$ entre dos K-espacios vectoriales U y V es un isomorfismo si y solo si $M_{\beta_V \beta_U}(f)$ es invertible. En tal caso se tiene que $M_{\beta_U \beta_V}(f^{-1}) = M^{-1}_{\beta_V \beta_U}(f)$.

Llamamos rango de la aplicación lineal $f : U \to V$ al rango de la matriz asociada a la aplicación lienal, $rang(f) = rang(M_{\beta_V \beta_U}(f))$.

6.4. Cambio de base.

6.5. El espacio de las aplicaciones lineales.

Dados dos K-espacios vectoriales U y V, denotamos por $\mathcal{L}(U, V)$ al conjunto formado por todas las aplicaciones lineales de U y V,

$$\mathcal{L}(U, V) = \{f : U \to V | flineal\}$$

Además, definimos las operaciones,

- Suma: dadas $f, g \in \mathcal{L}(U, V)$, se define la suma $f + g : U \to V$ como la aplicación $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$
- Producto: dada $f \in \mathcal{L}(U, V)$ y $k \in K$, se define el producto $kf : U \to V$ como la aplicación $(kf)(u) = kf(u)$

Con estas dos operaciones, $\mathcal{L}(U, V)$ es un K-espacio vectorial que denominamos espacio vectorial de las aplicaciones lineales de U en V.

Si tenemos dos K-espacios vectoriales U y V de dimensiones n y m respectivamente, entonces $\mathcal{L}(U, V)$ es isomorfo a $M_{mn}(K)$, lo que implica que, $dim(\mathcal{L}(U, V)) = dim(U)dim(V)$.

6.5.1. Espacio dual.

Se llama **espacio dual** de un K-espacio vectorial V, y se denotará por V^*, al espacio vectorial $V* = \mathcal{L}(V, K)$. A los elementos de V^* se les llama formas lineales sobre V. V^* es isomorfo a V.

6.6. Teorema de isomorfía.

Recordemos: Sean V un K-espacio vectorial y U un subespacio vectorial de V. Se dice que $v_1, v_2 \in V$ están relacionados módulo U si $v_2 - v_1 \in U$. Entonces V/U es un K-espacio vectorial y lo llamamos espacio vectorial cociente de V por U.

La aplicación lineal $\pi : V \to V/U$, con $\pi(v) = [v]$ (las clases de equivalencia de v), es suprayectiva, se llama proyección canónica, y $Ker(\pi) = U$.

Recordemos: Sean V un K-espacio vectorial de dimensión finita y U un subespacio vectorial de V. Entonces

$$dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$$

(Teorema de Isomorfía) Si $f : U \to V$ es lineal, entonces

$$Img(f) \cong U/Ker(f)$$

(Descomposición canónica de una aplicación lineal) Si $f : U \to V$ es lineal, entonces se puede descomponer de la forma

$$f = j \circ g \circ \pi$$

donde $\pi : U \to U/Ker(f)$ es sobreyectiva, $g : U/ker(f) \to Img(f)$ es isomorfismo, y $j : Img(f) \to V$ es inyectiva.

6.7. Ejercicios resueltos.

.

Ejercicio 01:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, x + 2y - 3z, y - z, x - y)$$

1. Calcule una base y unas ecuaciones de la imagen y del nucleo de f.
2. Calcule una base de $f(U)$ donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por la ecuación $x + y - 3z = 0$.
3. Calcule unas ecuaciones de $f^{-1}(W)$ donde W es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ $W = \{(x, y, z, t) | x + y + z - t = 0, x + 2y - z = 0\}$.

Ejercicio 02:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z) = (x + y, z, -z)$.

1. Calcule una base y unas ecuaciones de la imagen y del nucleo de f.
2. Calcule la descomposición canónica de f-

Ejercicio 03:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$una aplicación lineal. Se sabe que $(1, 1, 3) \in Ker(f)$ y que $f(1, 0, 1) = (1, 2, 3, 4)$, $f(1, 1, b) = (1, 0, 1, 0)$ y $f(2, 1, 1 + b) = (b, b, 2b, 2b)$ para cierto $b \in \mathbb{R}$. Determine el valor de b y calcule la matriz de f en las bases canónicas y una base de $Img(f)$.

Ejercicio 04:
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Se sabe que $(3, 1) \in Ker(f)$, $(1, -5, 2) \in Img(f)$ y que la segunda coordenada de $f(-1, 2)$ es 10. Determine la matriz de f en las bases canónicas.

Ejercicio 05:
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Calcule la matriz en las bases canonicas de f, sabiendo que verifica que

$f(1, 0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0)$ y $f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 0)$

y que además

$Ker(f) = \{(x, y, z, y)|x-2y+z+t = 0, x+y-2z+t = 0, 2x-y-z+2t = 0\}$

Ejercicio 06:
Decida si existe una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ con

$$Ker(f) =< (0,1,2,3,4),(4,3,2,1,0),(1,1,1,1,1) >$$

$$Img(f) =< (1,0,-1,0),(1,1,1,2),(1,1,1,1),(1,2,3,4) >$$

Ejercicio 07:
Discuta si la aplicaión $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con

$$f(x,y,z) = (2x+y+4z, x+y+2z, x+y+3z)$$

es biyectiva, y en caso afirmativo, encuentre su inversa.

Ejercicio 08:
Sea $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sean

$$\beta_1 = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),(1,1,1,1)\}$$

$$\beta_2 = \{(1,1),(0,2)\}$$

bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

1. Calcule $M_{\beta_1\beta_2}(f)$.
2. Calcular una base de $Ker(f)$ y $Img(f)$ en las bases canónicas.
3. Calcular una base de $Ker(f)$ y $Img(f)$ en las bases β_1 y β_2.

Ejercicio 09:
Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y

$$\beta = \{(1,1,1)_{\mathcal{C}}, (1,1,0)_{\mathcal{C}}, (0,1,1)_{\mathcal{C}}\}$$

una base de V siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de V. La matriz asociada a f viene dada por,

$$M_{\mathcal{C}\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ a & 0 & b \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in (R)$ y $f(1,-3,0)_\beta = (-7,-3,-10)_\beta$.

1. Demuestre que $a = 1$ y $b = 1$.
2. Calcule $M_{\mathcal{CC}}(f)$.
3. Calcule $M_{\beta\beta}(f)$.
4. Determine las ecuaciones cartesianas, la dimensión y una base de $Ker(f)$ tomando como sistema de referencia la base $\mathcal{C}$.
5. ¿Puede la dimensión de $Ker(f)$ ser distinta si consideramos la base $\mathcal{C}$ o la base β?.
6. Determine las ecuaciones cartesianas, la dimensión y una base de $Img(f)$ tomando como sistema de referencia la base β.

Ejercicio 10:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+ay+z, x+y+az)$$

1. Hallar el valor de a para el que f no es inyectiva, y para dicho valor, determinar una base de $Kerf$ y $Imgf$.
2. Para $a = 0$, hallar la matriz $M_{\mathcal{CC}}(f)$ donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
3. Para $a = 0$, hallar la matriz $M_{\beta\beta}(f)$ donde $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 7

Diagonalización de matrices

7.1. Matrices y endomorfismos.

7.1.1. Polinomio característico. Valores y vectores propios.

7.1.2. Multiplicidad algebráica y multiplicidad geométrica.

7.2. Matrices diagonalizables.

7.2.1. Matriz diagonal y matriz de paso.

7.2.2. Matrices simétricas. Diagonalización ortogonal.

7.3. Matrices no diagonalizables. Forma canónica de Jordan.

7.3.1. Subespacio propio generalizado.

7.3.2. Construcción de los bloques de Jordan.

7.3.3. Construcción de la matriz de Jordan y matriz de paso.

7.4. Valores y vectores propios complejos.

Capítulo 8

Formas mutlilineales.

8.1. Formas bilineales.

8.2. Formas cuadráticas.