Capítulo 0

Preliminares

0.1. Notación.

Denotaremos los conjuntos numéricos conocidos comos sigue:

- Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.
- Números enteros positivos: $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- Números enteros: $\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
- Números racionales: $\mathbb{Q} = \{a/b | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, y teniendo en cuenta que $a/b = c/d$ si y solo si $ad = bc$.
- Números reales: $\mathbb{R}$.
- Números complejos: $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

0.2. Definiciones previas.

0.2.1. Cuerpo.

Un cuerpo es un conjunto K, con dos operaciones, que llamaremos suma y producto, y que denotaremos por $+$ y Δ, respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades,

1. La suma es asociativa: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a+(b+c) = (a+b)+c$.
2. La suma es conmutativa: Dados $a, b \in K$, entonce $a + b = b + a$.

3. Existencia de elemento neutro para la suma: Existe un elemento que denotamos por $0 \in K$ y que llamamos elemento neutro para la suma, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para cualquier $a \in K$.

4. Existencia de elemento opuesto para la suma: Para todo $a \in K$ existe un elemento $a' \in K$ de forma que $a + a' = a' + a = 0$. En el caso de la suma, llamaremos a este elemento el opuesto de a y lo denotaremos por $-a$.

5. El producto es asociativo: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

6. El producto es conmutativo: Dados $a, b \in K$, entonce $a \cdot b = b \cdot a$.

7. Existencia de elemento neutro para el producto: Existe un elemento que denotamos por $1 \in K$ y que llamamos elemento uno (unidad), tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para cualquier $a \in K$.

8. Existencia de elemento inverso para el producto: Para todo $0 \neq a \in K$ existe un elemento $a'' \in K$ de forma que $a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1$. Este elemento inverso se denota por a^{-1} o $1/a$.

9. El producto es distributivo respecto a la suma: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Cuidado: Estamos definiciendo cuerpo conmutativo. Puede definirse un cuerpo no conmutativo excluyendo de la definición propiedad correspondiente. La definición puede variar según el autor, por lo tanto es importante contextualizar en qué situación estamos trabajando.

Notación: Será común denotar el producto $a \cdot b$ por ab.

0.2.2. Grupo abeliano.

Se dice que un conjunto K, con una operación que denotamos por $+$, y a la cual llamamos suma, es un grupo abeliano, si se cumplen las siguientes propiedades,

1. Asociativa: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2. Conmutativa: Dados $a, b \in K$, entonce $a + b = b + a$.

3. Existencia de elemento neutro: Existe un elemento que denotamos por $0 \in K$ y que llamamos elemento neutro para la suma, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para cualquier $a \in K$.

4. Existencia de elemento simétrico: Para todo $a \in K$ existe un elemento $a' \in K$ de forma que $a + a' = a' + a = 0$. En el caso de la suma, llamaremos a este elemento el opuesto de a y lo denotaremos por $-a$.

0.2.3. Anillo.

Un anillo, es un conjunto K con dos operaciones, que llamaremos suma y producto, y que denotaremos por $+$ y Δ, respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades,

1. La suma es asociativa: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a+(b+c) = (a+b)+c$.

2. La suma es conmutativa: Dados $a, b \in K$, entonce $a + b = b + a$.

3. Existencia de elemento neutro para la suma: Existe un elemento que denotamos por $0 \in K$ y que llamamos elemento neutro para la suma, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para cualquier $a \in K$.

4. Existencia de elemento opuesto para la suma: Para todo $a \in K$ existe un elemento $a' \in K$ de forma que $a + a' = a' + a = 0$. En el caso de la suma, llamaremos a este elemento el opuesto de a y lo denotaremos por $-a$.

5. El producto es asociativo: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.

6. El producto es conmutativo: Dados $a, b \in K$, entonce $a \cdot b = b \cdot a$.

7. Existencia de elemento neutro para el producto: Existe un elemento que denotamos por $1 \in K$ y que llamamos elemento uno (unidad), tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para cualquier $a \in K$.

8. El producto es distributivo respecto a la suma: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Cuidado: Estamos definiendo anillo conmutativo y con identidad. Puede definirse un anillo no conmutativo, o sin identidad, excluyendo de la definición las correspondientes propiedades. La definición puede depender del autor, por lo tanto, es importante contextualizar en qué situación estamos trabajando.

Nota: Un anillo, es un cuerpo para el que no se garantiza que cada elemento no nulo tenga inverso respecto a la operación producto.

0.2.4. Grupo.

Se dice que un conjunto K, con una operación que denotamos por $*$, es un grupo si se cumple

1. La operación es asociativa: Dados $a, b, c \in K$, entonces $a * (b * c) = (a * b) * c$.

2. Existencia de elemento neutro: Existe un elemento que denotamos por $e \in K$ y que llamamos elemento neutro, tal que $e * a = a * e = a$ para cualquier $a \in K$.

3. Existencia de elemento simétrico: Para todo $a \in K$ existe un elemento $b \in K$ de forma que $a * b = b * a = e$.

Nota: Un grupo, es un grupo abeliano no conmutativo.