Capítulo 4

Espacios vectoriales

4.1. Definición.

Un K-**espacio vectorial** (o espacio vectorial sobre K) es una terna $(V, +, \cdot)$ donde V es un conjunto no vacío, $+$ es una operación interna en V, que llamaremos suma, y $\cdot$ es una operación externa sobre V con elementos en el cuerpo K y que llamamos producto, y tales que cumplen:

1. La suma es asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todo $u, v, w \in V$.
2. La suma es conmutativa: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$.
3. La suma tiene elemento neutro: existe $0_V \in V$ tal que $0 + u = u$ para todo $u \in V$. A este elemento lo llamamos vector nulo o vector cero.
4. Todo elemento de V tiene un elemento opuesto: existe $u' \in V$ tal que $u + u' = 0_V$ para todo $u \in V$. El opuesto es único y lo denotamos por $-u$.
5. El producto es distributivo respecto a la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ para todo $u, v \in V$ y cualquier $\alpha \in K$.
6. El producto es distributivo respecto a la suma de escalares: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ para todo $u \in V$ y cualquier $\alpha, \beta \in K$.
7. El producto es semi-asociativo: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ para todo $u \in V$ y cualquier $\alpha, \beta \in K$.
8. El producto tiene elemento neutro: $1u = u$ para todo $u \in V$ siendo 1 el elemento neutro del producto en K.

A los elementos de V los llamamos vectores y a los elementos de K los llamamos escalares.

4.2. Espacios vectoriales notables.

4.2.1. Un cuerpo K sobre sí mismo.

Sea K un cuerpo cualquiera con la suma y el producto usual. Entonces K es un K-espacio vectorial.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

4.2.2. Un cuerpo K sobre otro cuerpo K'.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

4.2.3. K^n es un K-espacio vectorial.

Si definimos $K^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\ x_i \in K\}$ y las operaciones suma y producto,

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$k(x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$$

entonces K^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Ejemplo: Si $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces K^n es un espacio vectorial.

4.2.4. $M_{nm}(K)$ es un K-espacio vectorial.

Definimos $M_{nm}(K)$ como el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times m$ con coeficientes en el cuerpo K y las operaciones $+$ y $\cdot$ como la suma y el producto por escalares usuales en matrices. Entonces, $M_{nm}(K)$ es un K-espacio vectorial.

Ejemplo: Si $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo, $M_{nm}(K)$ es un K-espacio vectorial.

4.2.5. $K_n[x]$ es un K-espacio vectorial.

Defimos $K_n[x]$ como el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en el cuerpo k, y las operaciones $+$ y $\cdot$ como,

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x &+ a_2x^2 + ... + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n) = \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n\end{aligned}$$

$$k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n) = (ka_0) + (ka_1)x + (ka_2)x^2 + ... + (ka_n)x^n$$

entonces $K_n[x]$ con estas operaciones es un K-espacio vectorial.

Ejemplo: Si $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo, $K_n[x]$ es un K-espacio vectorial.

4.2.6. $\mathcal{F}(S, K) = \{f : S \to K\}$ es un K-espacio vectorial.

Definimos $\mathcal{F}(S, K) = \{f : S \to K\}$ como el conjunto de todas las aplicaciones de S en K, y las operaciones $+$ y $\cdot$ como,

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s)$$

$$(kf)(s) = kf(s)$$

entonces $\mathcal{F}(S, K)$ con estas operaciones es un K-espacio vectorial.

Ejemplo: Si $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo, $\mathcal{F}(S, K)$ es un K-espacio vectorial.

4.3. Vocabulario básico.

4.3.1. Combinación lineal.

Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ vectores del K-espacio vectorial V. Se dice que el vector $u \in V$ es una combinación lineal de estos n vectores si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ de forma que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$. A los escalares α_i los llamamos coeficientes de la combinación lineal.

4.3.2. Dependencia/independencia lineal.

Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ vectores del K-espacio vectorial V, se dirá que estos n vectores son linealmente independientes si el único valor que pueden tomar los coeficientes de la combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, es $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. En otro caso, se dirá que los vectores son linealmente dependientes, es decir, en este caso existirán algunos coeficientes $\alpha_i \neq 0$ tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$. A un conjunto de vectores linealmente independientes se les denomina (a veces) conjunto libre de vectores.

Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y sólo si uno de ellos se puede obtener como una combinación lineal de los restantes.

Ejemplo: Independencia lineal.
Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son linealemente independientes:

- $\{(1, 2, 3), (2, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
- $\{(1, -i, 0), (i, 1, 0), (2, 1 + i, 0)\}$ en $\mathbb{C}^3$.
- $\{2 + x + x^2, x, 2 + 3x + x^2\}$ en $\mathbb{R}[x]$.

Ejemplo: Independencia lineal.
Dados los vectores $v_1 = (1, 1, 0, m)$, $v_2 = (3, -1, n, -1)$ y $v_3 = (-3, 5, m, -4)$, estudiar para que valores de m y n son linealmente dependientes. En ese caso expresar v_3 como combinación lineal de v_1 y v_2.

Resultados importantes:

- Si $0 \in S$ entonces S es linealmente dependiente.

- $\{u\}$ es linealmente independiente si y solo si $u \neq 0$.
- Si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente, cualquier ampliación $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+k}\}$ es linealmente dependiente.
- Si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+k}\}$ es linealmente independiente, entonces cualquier reducción $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente.

4.4. Sistemas generadores y bases.

Si S es un subconjunto no vacio de un K-espacio vectorial V, entonces, el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S, que denotaremos por $\langle S \rangle$, es un subespacio vectorial de V, y además, es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S. Además, se dice que S es un sistema generador (o sistema de generadores) de V si $\langle S \rangle = V$. Diremos que S es un sistema generador de un subespacio vectorial U de V, si $\langle S \rangle = U$.

Una base de un espacio vectorial es un sistema generador en el que todos los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo: Base.
Comprobar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^3$ y señalar cuáles son una base,

1. $\{(1,2),(1,0),(0,1)\}$
2. $\{(1,2,1),(1,0,1),(2,3,2)\}$
3. $\{(1,0,0),(2,1,1),(0,1,1),(1,-1,-1)\}$
4. $\{(1,0,0),(2,1,1),(0,1,1),(1,-1,-2)\}$
5. $\{(1,0,0,1),(0,1,1,1),(1,1,1,2),(1,-1,-1,2)\}$

Resultados importantes:

- Si S es un conjunto linealmente independiente de vectores y $u \notin < S >$, entonces $S \cup \{u\}$ también es un conjunto de vectores lienalemente independientes.
- Todo espacio vectorial no nulo tiene una base.

- (Steinitz) Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ son una base del espacio vectorial V, y $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes con $m \leq n$, entonces se pueden sustituir m vectores de la base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ por los vectores $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ obteniendose una nueva base.

- Todo conjunto de vectores linealmetne independiente puede completarse a una base.

- Todas las bases de un espacio vectorial finitamente generado no nulo tienen el mismo número de elementos.

- Si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es sistema generador de V y v_i es combinación lineal de los demás vectores, entonces $\{v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n\}$ también es sistema generador.

Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita y no nulo, se llamará dimensión de V, y lo denotaremos por $dim_K(V)$ o por $dimV$ cuando esté claro el contexto, a la cantidad de vectores que conforman cualquier base de V. Si $V = 0$ diremos que $dimV = 0$. Si V no tiene dimensión finita, diremos que tiene dimensión infinita, $dimV = \infty$.

Si $U \neq 0$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial V, entonces $dimU \leq dimV$, y además $dimU = dimV \Leftrightarrow U = V$.

Llamaremos rango del conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ del espacio vectorial V, a la dimensión del subespacio vectorial generado por ellos.

4.5. Matriz de cambio de base.

Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, se llaman coordenadas de un vector $v \in V$ con respecto a la base $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ a la única n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ tal que $v = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$. Se representa $v_\beta = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ejemplo: coordenadas de un vector respecto a una base.
Expresar el vector $(1,2,3)_{\mathcal{C}}$ en coordenadas de la base

$$\beta_1 = \{(1,-1,2),(0,1,1),(1,0,4)\}$$

Expresar el vector $(1,2,3)_{\beta_1}$ en coordenadas de la base canónica y en coordenadas de la base

$$\beta_2 = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,0)\}$$

Sean $\beta_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ y $\beta_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dos bases del K-espacio vectorial V. Las ecuaciones que nos permiten obtener cualquier vector que esté expresado en cordenadas de la base β_2, w_{β_2}, como un vector expresado en coordenadas de la base β, w_β, se llaman ecuaciones del cambio de base de β_2 a β_1. Supongamos que $w_{\beta_1} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y que $w_{\beta_2} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, entonces

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & +...+ & a_{1n}y_n & = & x_1 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & +...+ & a_{2n}y_n & = & x_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & + & a_{n2}y_2 & +...+ & a_{nn}y_n & = & x_n \end{array}\right\}$$

donde $v_{j_{\beta_1}} = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$. A partir de la expresión matricial de este sistema obtenemos la matriz de cambio de base de β_2 a β_1,

$$M_{\beta_1\beta_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Importante: $M_{\beta_2\beta_1} = M^{-1}_{\beta_1\beta_2}$.

Ejemplo: construir matriz de cambio de base.
Dadas las bases

$$\beta_1 = \{(1,-1,2),(0,1,1),(1,0,4)\}$$

$$\beta_2 = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,0)\}$$

determinar $M_{\beta_1\beta_2}$

4.6. Subespacios vectoriales.

Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto no vacio U de V, se dice que es un subespacio vectorial de V, si cumple las dos condiciones siguientes:

1. Si $u, v \in U$, entonces $u+v \in U$ (U es cerrado para la suma de vectores).

2. Si $u \in U$, y $\alpha \in K$, entonces $\alpha u \in U$ (U es cerrado para el producto por escalares).

Estas dos condiciones se pueden simplificar en una sóla,

- Si $u, v \in U$, y $\alpha, \beta \in K$, entonces $\alpha u + \beta v \in U$ (U es cerrado para combinaciones lineales).

.

Ejemplo: subespacio vectorial por definición.
Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$,

1. $A = \{(3x, x, x+y, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

2. $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 \cdot x_2 = 0\}$

3. $C = \{(1, x, 1, x) | x \in \mathbb{R}\}$

4. $D = \{(x, x, x, x) | x \in \mathbb{R}\}$

5. $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$

Un subespacio vectorial puede expresarse de distintas formas: como el subespacio generado por un conjunto de vectores, como el subespacio generado por una base, como el conjunto de soluciones de una ecuación en forma general o paramétrica. En cualquier caso, y sean cuales sean los datos, debemos ser capaces de obtener una base y las ecuaciones general y paramétrica de dicho subespacio.

4.6.1. Subespacio generado por un conjunto de vectores.

Dado el conjunto generador obtendremos una base quedándonos con un subconjunto que sea linealmente independiente. Desde este subconjunto de vectores crearemos la ecuación paramétrica de forma inmediata y a partir de esta, la forma general.

4.6.2. Ecuaciones de un subespacio vectorial.

Todo subespacio vectorial U de un espacio vectorial V de dimensión finita puede ser interpretado como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, el que expresa un vector arbitrario $u \in U$ como combinación lineal de los elementos de una base β de U, $\beta_U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$,

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$$

Esta es la ecuación paramétrica del subespacio U. Cualquier sistema homogéneo que tenga como solución esta ecuación se llamará ecuación cartesiana, general o implicita del subespacio U.

La cantidad de ecuaciones cartesianas necesarias para representar un subespacio vectorial U de V serán $dim(V) - dim(U)$.

Ejemplo: dado un sistema generador obtener una base y las ecuaciones del subespacio.
Sea

$$S =< (1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5, 1), (3, 4, 5, 1, 2), (0, 1, 2, 8, 4), (1, 1, 1, 3, 2) >$$

obtener para S una base y sus ecuaciones general y paramétrica.

Ejemplo: obtener una base a partir de las ecuaciones de un subespacio.
Sea

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)|x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, x_3 - x_4 - 2x_5 = 0\}$$

obtener para S una base.

4.6.3. Espacio de filas y espacio de columnas de una matriz.

Dada una matriz $A \in M_{mn}(K)$, llamamos espacio de filas y lo denotamos por $\mathcal{F}(A)$ al espacio generado por las filas de la matriz A. De la misma forma, llamamos espacio de columnas y lo denotamos por $\mathcal{C}(A)$, al espacio generado por las columnas de A.

Ejemplo: espacio de filas/columnas de una matriz.
Sea
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
calcular las ecuaciones implicitas del subespacio de filas y del subespacio de columnas de A.

4.6.4. Subespacio intersección.

Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V, entonces $U_1 \cap U_2$ es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo: obtener el subespacio intersección.
Sean
$$S_1 =< (1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2) >$$
$$S_2 = \{(x,y,z,t)|x+y+z-t=0, z-t=0\}$$
obtener $S_1 \cap S_2$.

Clave: El subespacio intersección se puede determinar de forma sencilla a partir del sistema formado por las ecuaciones cartesianas de los dos subespacios.

4.6.5. Subespacio suma. Suma directa.

Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V, entonces $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a U_1 y U_2. A este subespacio se le denomina suma de U_1 y U_2. $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$. Esta suma se dirá que es suma directa, y la denotaremos por $U_1 \oplus U_2$ si además sucede que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Ejemplo: obtener el subespacio suma.
Sean
$$S_1 =< (1,2,3,4),(2,3,4,1) >$$
$$S_2 = \{(x,y,z,t)| - 3y + 2z = 0, -2y + t = 0\}$$
obtener $S_1 + S_2$.

Clave: El subespacio suma, se puede obtener a partir de un sistema generador, formado por la unión de los vectores de las bases de los dos subespacios vectoriales.

4.6.6. Fórmula de Grassmann.

Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de un K-espacio vectorial V de dimensión finita, entonces

$$dim(U_1) + div(U_2) = dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2)$$

4.6.7. Espacio cociente.

Sean V un K-espacio vectorial y U un subespacio vectorial de V. Se dice que $v_1, v_2 \in V$ están relacionados módulo U si $v_2 - v_1 \in U$. Entonces V/U es un K-espacio vectorial con las operaciones $+$ y $\cdot$,

$$[u] + [v] = [u + v]$$

$$k[u] = [ku]$$

y lo llamamos espacio vectorial cociente de V por U. Además,

$$dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$$

Ejemplo: subespacio cociente.
Sean el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$,

$$U = \{(x, y, z)|x + y + z = 0\}$$

Determinar si las siguientes parejas de vectores determinan la misma clase de equivalencia,

- $u = (0, 1, 3)$ y $v = (1, 1, 2)$,
- $u = (1, 1, 1)$ y $v = (2, 1, 2)$.

Determine una base del espacio cociente $\mathbb{R}^3/U$ y calcule las coordenadas del vector $w = (1, 2, 3) + U$ en dicha base.

4.7. Ejercicios resueltos.

.

Ejercicio 01:
Sea el subespacio vectorial $S \subset \mathbb{R}^4$ de base $\beta_S = \{(1, 0, 2, 1), (1, 1, -1, -1)\}$

1. Determine la dimensión de S.
2. Estudie para qué valores de a, $(2, a, 1, 0) \in S$.
3. Halle las ecuaciones implicitas de S.

Ejercicio 02:
Dados los subespacios U y V de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x, y, z, t) | 2x + 2y - z = 0, x + 3y + t = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) | 3x + y - 5t = 0, x + z - 4t = 0\}$$

1. Encuentre una base y unas ecuaciones del subespacio $U + V$.
2. Determine k para que $(2, k, 2, 1) \in U + V$.
3. Para dicho valor de k determine las coordenadas de $(2, k, 2, 1)$ en la base hallada en el apartado 1.

Ejercicio 03:
Dados los subespacios U y V de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x, y, z, t) | 5x + z = 2y + t, 2x + t = 3y\}$$

$$V = < (1, 0, 1, 0), (2, 0, a, -1) >$$

1. Halle una base de U.
2. Determine a para que NO se cumpla $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.
3. Para dicho valor de a calcule bases para $U + V$ y $U \cap V$.

Ejercicio 04:
Dados los subespacios U y V de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x, y, z, t) | x + y - z - t = 0, x - y - z + t = 0\}$$

$$V = < (0, 1, 2, 3), (3, 2, 1, 0) >$$

1. Halle una base y unas ecuaciones para $U + V$.
2. Halle una base y unas ecuaciones para $U \cap V$.

Ejercicio 05:
Extienda el conjunto de vectores $V = \{(1,-2,0,-1),(4,2,2,1),(5,4,3,2)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$ utilizando un vector de la base canónica.

Ejercicio 06:
En el subespacio $\mathbb{R}_4[x]$ de los polinomios de grado ≤ 4 se consideran los subespacios

$$U =< x(x+1)(x^2+1),(x+1)^3,(x+1)^2 >$$

$$V =< x^4-1, x(x+1)(x-1),(x+1)(x^3+1) >$$

encuentre una base del subespacio $U \cap V$ y determine cuál de los polinomios está en él: $p(x) = x^2$ y/o $q(x) = (x+1)(x^3-1)$.

Ejercicio 07:
En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado ≤ 3 se considera el subespacio

$$U = \{p(x)|p(2) = p(3) = 0\}$$

Determine su dimensión y una base.

Ejercicio 08:
En el K-espacio vectorial K^n se sabe que en el subespacio $V =< v_1, v_2, v_3 >$, v_1 y v_2 no son proporcionales y que el subespacio W está generado por una única ecuación implicita. Demuestre que $V \cap W \neq 0$.

Ejercicio 09:
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ decida si las siguientes funciones son linealmente independientes: $f(x) = 1$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = 2^{-x}$.

Ejercicio 10:
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales, se pide

1. Estudie si el conjunto $S = \{x^3 - x + 1, x^2 - x, 3\}$ es linealmente independiente.

2. Ampliar S hasta una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

3. Escribir las coordenadas del vector $x^3 + x^2 + x + 1$ en la base obtenida en el apartado 2.

Ejercicio 11:
Sea U el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$. Determinar su dimensión.

Ejercicio 12:
Sea U el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$. Determinar su dimensión y una base.

Ejercicio 13:
Sean

$$U =< (1, 1, \alpha), (\alpha, 1, 1) >$$

$$V =< (-1, \alpha, -1), (1, 1, 1) >$$

Calcular la dimensión de $U \cap V$ según los valores de α.