Problema 2 [1,75 puntos + 0,75 puntos]

Dada la ecuación $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Se pide:

(a) Discutir las soluciones de la ecuación en función de los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

(b) Resolver la ecuación si $k = -27$.

$-20 \quad 18$

$81 \quad -108 \quad -18 \quad +36$

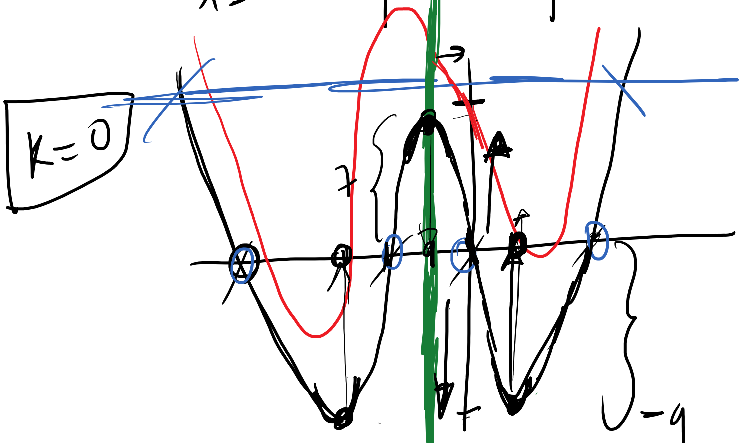
ⓐ $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + k$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12$ $\qquad f''(x) = 12x^2 + 24x - 4$

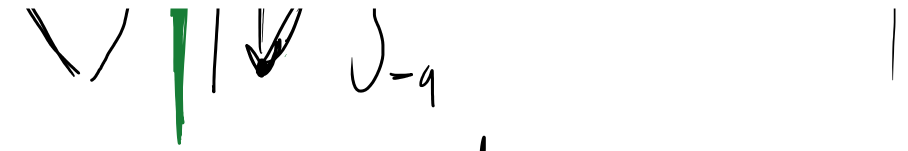
	4	12	-4	-12
1		4	16	12
	4	16	12	$\boxed{0}$
-1		-4	-12	
	4	12	$\boxed{0}$	
-3		-12		
	4	$\boxed{0}$		

extremos:

	f''	f
$x = 1$	+	$-9+k$
$x = -1$	−	$7+k$
$x = -3$	+	$-9+k$.



4 raíces reales



$$\begin{cases} \text{Si } k>9 \longrightarrow \text{no raíces reales} \\ \text{Si } k=9 \longrightarrow 2 \text{ raíces reales} \\ \text{Si } -7<k<9 \longrightarrow 4 \text{ raíces reales} \\ \text{Si } k=-7 \longrightarrow 3 \text{ raíces reales} \\ \text{Si } k<-7 \longrightarrow 2 \text{ raíces reales} \end{cases}$$

(b) $f(x) = x^4+4x^3-2x^2-12x-27$

$y = x+1 \longrightarrow \boxed{x = y-1}$

$$f(y) = (y-1)^4+4(y-1)^3-2(y-1)^2-12(y-1)-k$$

$$= y^4 - \cancel{4y^3} + \cancel{6y^2} - \cancel{4y} + 1 + 4(\cancel{y^3} - \cancel{3y^2} + \cancel{3y} - 1)$$
$$-2(\cancel{y^2} - \cancel{2y} + 1) - \cancel{12y} + 12 + k =$$

-4
12
$+4$
-12

$$= y^4 - 8y^2 + 7 + k.$$

$$y^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(7+k)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36-4k}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{9-k}}{2} = 4 \pm \sqrt{9-k}$$

- Si $k>9 \longrightarrow$ no raíces reales
- Si $k=9 \longrightarrow y=\pm 2 \longrightarrow \boxed{x=1,-3}$
- Si $-7<k<9 \longrightarrow$ 4 raíces reales

$$x = \pm\sqrt{4\pm\sqrt{9-k}} - 1$$

- Si $k=-7 \longrightarrow$ $y^2=4 \longrightarrow y=\pm 2 \quad x=1,-3$

$$y^2=0 \longrightarrow y=0 \quad x=0$$

- Si $k<-7 \longrightarrow$ 2 raíces reales

$$x = \pm\sqrt{4+\sqrt{9-k}} - 1$$

2 complejas conjugadas

$$x = \pm\sqrt{4\cancel{+}\sqrt{9-k}} - 1$$

$$\boxed{k=-27}$$

$$x = \pm\sqrt{10} - 1$$

$$\begin{cases} x_1 = -1-\sqrt{10} \\ x_2 = -1+\sqrt{10} \end{cases}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{4 - 6} =$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}\, i$$