Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros reales). Supongamos que si a, b, c son las tres raíces de P, las de Q son $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{b+c}{2}$. Determinar todos los posibles polinomios P y Q.

$$\begin{cases} P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \longrightarrow P'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \\ P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \end{cases} \qquad \boxed{P'(x) = Q(x)}$$

$$Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

$$Q(x) = 3\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{b+c}{2}\right)$$

$$P(x) = (x-a)\overline{(x-b)(x-c)}$$

$$P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)\left[(x-c) + (x-b)\right] =$$

$$= (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

$P'(x) = Q(x)$ $$\overset{*}{=} 3\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{b+c}{2}\right)$$

$$\boxed{a = b = c} = \frac{a+b}{2} = \frac{b+c}{2}$$

$$P(x) = \overline{(x-a)(x-b)}(x-c) = \left(x^2 - (a+b)x + ab\right)(x-c)$$

$$= x^3 - (a+b)x^2 + abx - cx^2 + c(a+b)x - abc$$

$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

$$= x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

$$A = -(a+b+c) \xrightarrow{a=b=c} A = -3a$$

$$B = ab+ac+bc \xrightarrow{a=b=c} B = 3a^2$$

$$C = -abc \xrightarrow{a=b=c} C = -a^3$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Solución:} & P(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\ & Q(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2 \end{array}}$$