Prólogo: Apología del redescubrimiento.

Jose María Sánchez Reales

notodoesmatematicas@hotmail.com

Si miramos un libro de texto, podemos encontrar una estructura, bastante generalizada, en el desarrollo de cualquier tema en matemáticas: axioma-definición $\rightarrow$ proposición-lema-teorema-coloralio. Esto es, se establecen una cuantas premisas –un marco de trabajo–, se clarifican una cuantas definiciones, y el pensamiento lógico razonado nos conduce a unos resultados demostrados. Todo el peso cae sobre el rigor con el cuál se procede. En el extremo opuesto, nos podríamos encontrar con una posición más divulgativa que instructiva, en la cual se intentan construir los conceptos de manera informal, dando todo el peso a la coprensión o a la interpretación y reduciendo gran parte del rigor a "detalles" prescindibles. Todo el peso cae sobre la comprensión de la idea general. Parece que nos movemos en los extremos.

Una instrucción (auto-instrucción) puramente formal, marca el punto de partida en la definición, y esto conduce, inevitablemente, a que muchas veces no veamos más atrás. No nos damos cuenta de que estamos hablando de un conocimiento ya construido, y que el proceso de descubrimiento –en el que se observa una realidad, generalmente abstracta, se analiza, se cuestiona, se buscan patrones, y ya, muy al final del camino, si se puede, se axiomatiza– difiere bastante, en cuanto a su secuenciación, de lo expuesto. Una instrucción puramente informal tiene todos los defectos que se puedan achacar a la instrucción formal pero ninguna de sus virtudes, pues no nos permitirá construir ningún conocimiento, ni avanzar más lejos de unas pocas ideas superficiales.

La matemática axiomatizada y bien formalizada permite examinar los razonamientos y trasmitir el conocimiento de forma sencilla y rigurosa. Tan cierto es esto, como que en el momento en que el formalismo nos lleva a sacrificar la intuición y el redescubrimiento, la matemática empieza a teñirse de oscuridad, y un halo de dudas se ciernen sobre nuestro horizonte.

Formalizar sin motivar conduce a que muchos estudiantes (y algunos profesionales), asimilen la materia como una cuestión de fe, y a que otros, más inconformistas, vayan interiorizando una sensación de arbitrariedad. No hay nada más desmotivador en matemáticas que percibirlas como el designio caprichoso de algún dios.

La duda como principio irrenunciable.

Para investigar la verdad, es preciso dudar, en cuanto sea posible, de todas las cosas[1]. La matemática es un sistema formal consistente y verificable. Incluso aquellos que como yo os sintáis pecar de platónicos, podéis pensar que la matemática es lo más parecido a una

[1]Descartes, R. (1637) *Discurso del método.*

divinidad: omnipotente, omnipresente y omnisciente. Sin embargo, la matemática (el objeto, y por ende, lo objetivo, y por ende, perfecto) es interpretada por el matemático (el sujeto, y por ende, subjetivo, y por ende, susceptible de error), lo que es, o debiera ser, razón suficiente para la duda. Asumir como verdadera alguna cosa, aunque esta resulte ser verdadera, no es un ejercicio de la razón sino de la fe. Para alcanzar la comprensión hemos de cuestionarnos aquello que es verdadero y ser capaces de recostruirlo por nosotros mismo. Por esta razón estamos hablando de redescubrir la matemátcia. Y notese que hablamos específicamente de re-descubrir, y no de descubrir, y es que existe una sutil diferencia entre ambos verbos. Re-descubrir necesita que algo ya haya sido descubierto anteriormente, y esto nos resulta una ventaja, puesto que conocemos dónde está la meta a la cuál queremos llegar y esto sin duda iluminará sobre la dirección que hemos de caminar.

Hacer matemáticas no es publicar matemáticas.

El matemático Joel Spencer lo explica perfectamente en una entrevista para el documental sobre la vida de Paul Erdos[2]:

...cuando se publican las matemáticas, éstas aparecen de manera formal, son puras, es teorema-demostración-teorema-demostración-corolario... pero hacer matemáticas es algo completamente diferente, es tres o cuatro personas, sentadas en torno a una mesa, con tazas de café, un poco de papel, lanzandose ideas, avanzando y retrocediendo, haciendo un monton de conjeturas inverosimiles, muchas de las cuales terminan siendo radicalmente falsas...

Esta es la manera en la que se descubren las matemáticas y debería de ser la manera en la que abordamos su redescubrimiento. Tenemos que perder el miedo a realizar conjeturas absurdas o a cuestionar lo que a la vista le es evidente. Andar cada paso del camino cuestionandonos todas las evidencias y planteandonos todas las posibilidades.

De la misma manere, hemos de hacer un esfuerzo por transmitir de forma rigurosa, tanto las conclusiones encontradas como los pasos mal dados. El redescubrimiento intuitivo de las ideas abstractas no debe en ningún momento suponer un sacrificio en la formalidad y el rigor de la materia, pues de lo contrario, y como ya se ha advertido, se terminará caminando hacia un conocimiento superficial, volatil, arbitrario, esoterio e indefendible por medio de la razón.

El rigor como base para motivar en matemáticas.

Un racionalista, Christian Wolff[3], decía que *cuanto mayor es la perfección que percibimos, tanto mayor es también el placer que experimentamos.* Por esta razón hemos escuchado tantas veces decir a algún estudiante "si es que cuando las comprendo, me gustan", haciendo alusión a que ha empezado a percibir algo de la perfección que reside en las matemáticas.

El que algo tenga una aplicación puede parecernos atractivo en un principio, pero no podemos negar que, en la mayoría de las ocasiones, la tentación de *que lo haga otro* doblega nuestra voluntad de aprender. A esto hemos de unirle otro hecho que parece que no podremos negar, y es que el placer no siempre procede de aquello que nos divierte. Pareciera incluso

[2] N is a number: a portrait of Paul Erdos.

[3] En su obra de 1719 *Pensamientos racionales*. Epígrafe 409.

que aquello que se logra con mayor esfuerzo resulta proporcionando un mayor deleite. Si a esto le añadimos la certeza de que no encontraremos nada tan llamativo como aquello que percibimos como perfecto, quizá empecemos a plantearnos la necesadad de reintroducir el rigor, el formalismo, el descubrimiento, el análisis, la reflexión, la imaginación, y tantos otros conceptos que le son inherentes a la materia, en nuestras clases de matemáticas. Este es el fin último del trabajo que aquí se presenta: plantear un modelo de taller, que aplicado de forma complementaria a la clase ordinaria, permita al estudiante profundizar en la materia desde el punto de vista del redescubrimiento, de manera que termine fundamentando cada concepto y deshechando cualquier atisbo de arbitrariedad que pudiera albergar.

Como ya hemos dicho, el objetivo de esta serie de monográficos es claro: ayudar a asimilar conceptos, a comprender el porqué de las cosas, a relacionar herramientas, y muy importante, motivar al estudiante. Y es que, el mayor arma de motivación que tenemos dentro de esta materia es la de ayudar al estudiante a percibir esa perfectión de la que hablabamos.El objetivo, como dijimos en la introducción, es ser capaces de fundamentar todo aquello que es susceptible de ser interpretado como arbitrario a lo largo de la instrucción ordinaria en la materia.

Consejos.

Plantea y permite que te plantéen hipótesis imaginativas, incluso descabelladas. Evalúa su pertinencia, los escenarios que te abren y los escenarios que te cierran.

No aceptes ni rechaces una afirmación sin evaluarla en profundidad: cuáles son sus matices y cuáles son sus implicaciones.

Pequeñas modificaciones en una hipótesis pueden dar lugar a nuevos escenarios de interes.

No te quedes en la superficie. Siempre se puede profundizar un poco más, siempre se puede ir más lejos.

Elimina de tu vocabulario y de tu mente toda la argumentaria vacía: por consenso, por convenio, por definición, por el teorema 7. Mucho más, frases despóticas del tipo *confía en mí*, *te lo digo yo*, o *soy licenciado en.*

Yerra tanto el humilde como el arrogante, sin embargo, el primero se dirige hacia la verdad y el segundo vaga como un necio.