Problema 5.

a) Un grupo de alumnos de 1º de la ESO va a visitar las instalaciones deportivas de un equipo de baloncesto. Para dinamizar la visita, el club ha preparado una actividad para el alumnado. Sobre la cancha han colocado cierto número de pelotas de baloncesto. Si cada pelota dispuesta la toma un alumno distinto, quedarán n alumnos sin haber cogido ninguna pelota. Sin embargo, si se montan equipos de n alumnos alrededor de cada pelota dispuesta, quedarán libres n pelotas. ¿Cuántas pelotas ha dispuesto el equipo de baloncesto para organizar la actividad?

b) Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

(b.1) Represéntela

(b.2) Calcule, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, el número de soluciones de la ecuación

$$x - a \ln x = 0$$

PROPUESTA:

$\boxed{a)}$ Si denotamos por N la cantidad de pelotas que ha dispuesto el club de baloncesto y por a la cantidad de alumnos que han acudido a la visita, el problema consiste en determinar el valor de N. Si al repartir las pelotas, hay n alumnos que no cogen pelota, esto es porque $a = N + n$. Si damos una pelota a cada grupo de n alumnos y sobran n es porque $n(N - n) = a$. Esto nos lleva a la identidad

$$N + n = n(N - n)$$

Como el objetivo es determinar N, vamos a utilizar esta igualdad para expresar N en función de n:

$$\begin{aligned} N + n &= nN - n^2 \\ N - nN &= -n^2 - n \\ N(1 - n) &= -n^2 - n \\ N &= \frac{n(n+1)}{n-1} \end{aligned}$$

que lógicamente al representar una "cantidad de pelotas de baloncesto" debe ser un número natural. Esto implica que necesariamente ha de suceder que

$$(n - 1) \mid n(n + 1)$$

donde hemos denotado con el símbolo "|" el concepto "divide a". La clave aquí está en que $n - 1$, n y $n + 1$ son tres números naturales consecutivos, lo que necesariamente implica que

- si $n - 1 \neq 1$ entonces $(n - 1) \nmid n$
- si $n - 1 \neq 2$ entonces $(n - 1) \nmid n$ y $(n - 1) \nmid (n + 1)$

por lo que $n - 1 \neq 1, 2$ tendrá en su factorización única como producto de primos algún factor que o bien no divida a n o bien no divida a $n+1$. Por esta razón, los únicos casos en los que la división será natural, y por lo tanto N, serán aquellos en los que o bien $n-1=1$ o bien $n-1=2$, lo que nos lleva a $n=2$ o $n=3$, dando en ambos casos un valor de $N=6$. Por esto podemos concluir que la cantidad de balones que preparó el equipo de baloncesto fue de 6.

$\boxed{(b)}$ Tenemos en cuenta que $dom(f)=(0,+\infty)-\{1\}$ (puesto que $\ln 1=0$). Además,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

por lo que la función tiene una asíntota vertical en $x=1$. Además,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$$

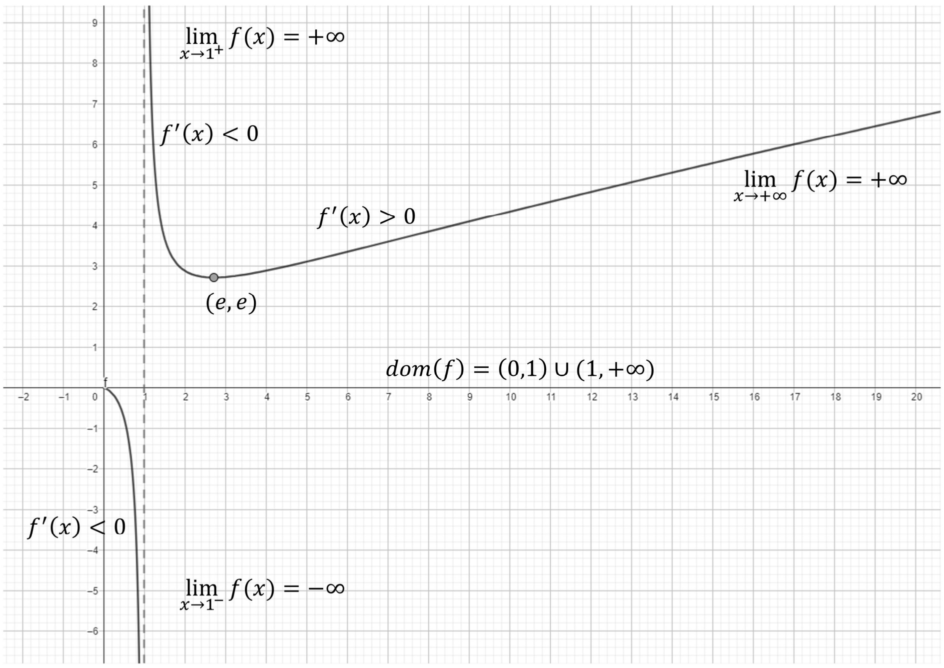
Puesto que el numerador se anula únicamente para $x=0\notin dom(f)$, la función no corta núnca al eje de abcisas.
Para calcular los posibles extremos relativos necesitaremos la derivada

$$f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$$

Tenemos que

$$f'(x)=0\leftrightarrow \ln x=1\leftrightarrow x=e$$

y puesto que $\ln x<0$ cuando $x\in(0,1)$ $\ln x>0$ cuando $x\in(1,+\infty)$, entonces f es monótona decreciente en el intervalo $(0,1)\cup(1,e)$ y monónota creciente en $(e,+\infty)$, por lo que deducimos que tiene un mínimo relativo en $(e,f(e)=e)$



De la gráfica de la función observamos que la imagen de la función es $(-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$, que será clave para resolver el apartado (b.2).

(b.2) Observamos que la ecuación $x - a \ln x = 0$ da lugar a la expresión

$$a = \frac{x}{\ln x}$$

que está directamente relacionada con la función del apartado (b.1), en el sentido de que es equivalente a decir $f(x) = a$. Esto nos permite imaginar que la cantidad de soluciones de la ecuación $x - a \ln x = 0$, en función de los valores de a viene dada por la cantidad de veces que intersectan la función $f(x) = a$ y la recta horizontal $f(x) = a$, por lo que, observando la gráfica obtenida en el apartado (b.1) podemos responder de manera inmediata que
- $x - a \ln x = 0$ tiene una única solución real para $a < 0$ o $a = e$
- $x - a \ln x = 0$ no tiene solución real para $0 \leq a < e$
- $x - a \ln x = 0$ tiene dos soluciones reales para $a > e$