Capítulo 3

Castilla y León

3.1. Castilla y León 2024

Problema 1. (Solución)
De los resultados de un examen universitario queremos saber el número de aprobados, el número de suspensos, y el número de no presentados. De estos 3 números sabemos que son números primeros y distintos; y además que si multiplicamos el número de aprobados por "la suma del número de aprobados y de los no presentados"se obtiene una cantidad superior en 120 al número de suspensos. ¿Cuáles son estos 3 números? Halla todas las soluciones del problema, justificando que no hay más.

PROPUESTA:
Vamos a denotar por x a la cantidad de aprobados, por y a la cantidad de suspensos y por z a la cantidad de no presentados, entendiendo que $x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y que según las hipótesis del enunciado $x \neq y \neq z \neq x$ y además, los tres son números primos.
La única ecuación que nos permite plantear el enunciado es *si multiplicamos el número de aprobados por "la suma del número de aprobados y de los no presentados"se obtiene una cantidad superior en 120 al número de suspensos*, esto es,

$$x(x+z) = y + 120$$

Analizaremos la paridad de cada lado de esta expresión teniendo en cuenta que todo número primo distinto de 2 es impar:

$\bullet^1$ Si $x = 2$ entonces $x(x+z)$ será par, mientras que $y + 120$ será impar. Por esta razón, podemos concluir que necesariamente $x \neq 2$

$\bullet^2$ Si $y = 2$ entonces $x(x+z)$ será par, por ser $(x+z)$ impar+impar=par. Por otro lado, $y + 120 = 2 + 120 = 122$. Esto nos da la posibilidad de que

$$x(x+z) = 122$$

•[3] Si $y \neq 2$, entonces $y+120$ es impar, lo que obliga a que $x(x+z)$ sea impar. La única manera de que esto ocurra es obligando a que $x \neq 2$ (cuestión que ya hemos asumido de [1] y que $(x+z)$ sea impar. Esto obliga a que $z=2$. y nos lleva a la situación

$$x(x+2) = y+120$$

Esto nos lleva a la conclusión de que o bien $y=2$ o bien $z=2$. Analizamos ambos casos:
Caso 1: $y=2$

$$x(x+z) = 122 = 2 \cdot 61 = 2(2+59)$$

donde es cierto que identificando coeficientes $x=2$ $z=59$ ambos son números primos, pero en este caso estamos contradiciendo la condición de que todos los primos sean distintintos $(x=y)$ También puede notarse que habíamos concluido en el análisis previo que no podía suceder $x=2$ (ahora vemos que esto obligaría a $y=2$)

Caso 2: $z=2$

$$x(x+2) = y+120$$

que podemos reescribir como una ecuación de segundo grado en forma canónica

$$x^2+2x-(y+120)=0$$

para obteneer

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4(y+120)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+(y+120)}}{2} = -1 \pm \sqrt{y+121}$$

Esto implica a que necesariamente $y+121$ tiene que ser un cuadrado perfecto, es decir, $y+121=m^2$ para un cierto $m \in \mathbb{Z}$. Esto nos lleva a que

$$y = m^2 - 121 = m^2 - 11^2 = (m-11)(m+11)$$

y puesto que y es número primo, uno de estos factores ha de la unidad. El único valor que tiene sentido en el contexto es cuando $m-11=1 \to m=12$, de donde obtenemos $y=23$ y $x=11$.

Observamos que hemos analizado exhaustivamente todos los casos posibles otbeniendo que la única solución posible al problema es que se han aprobado 11 alumnos, han suspendido 23 y hubo 2 no presentados.