Problema 1 (COVID)

Un bombo contiene bolas numeradas con números naturales mayores que 0 que se emplean para un juego. Para jugar, se mezclan las bolas y se extraen dos al azar. Si la suma de las bolas extraídas es par, se gana el juego. Si la suma de las bolas extraídas es impar, se pierde el juego. Un juego es justo si la probabilidad de ganar es igual a la probabilidad de perder. Determinar las condiciones bajo las que se configuran TODAS las posibilidades de que el juego descrite sea justo.

PROPUESTA:
Denotamos por P_i al suceso "obtener un número par en la extracción i" y por I_i al suceso "obtener un número impar en la extracción i". En principio no conocemos cuántas bolas pares y cuántas bolas impares contiene el bombo. Por esta razón, vamos a denotar por p a la cantidad de bolas pares que contiene la urna y por i a la cantidad de bolas impares, asumiendo que ámbos son números naturales (representan una cantidad discreta). De esta manera, y puesto que las dos bolas se extraen a la misma vez, lo que es equivalente a extracciones sucesivas sin reemplazamiento, tenemos las siguientes probabilidades

$$P(P_1) = \frac{p}{p+i} \qquad P(P_2|P_1) = \frac{p-1}{p+i-1} \qquad P(I_2|P_1) = \frac{i}{p+i-1}$$
$$P(I_1) = \frac{i}{p+i} \qquad P(P_2|I_1) = \frac{p}{p+i-1} \qquad P(I_2|I_1) = \frac{i-1}{p+i-1}$$

Se gana cuando la suma de ámbas numeraciones es par, esto es, cuando ámbas bolas son pares o cuando ámbas bolas son impares, obteniendo una probabilidad de victoria de

$$P(P_1 \cap P_2) + P(I_1 \cap I_2) = \frac{p}{p+i}\frac{p-1}{p+i-1} + \frac{i}{p+i}\frac{i-1}{p+i-1} = \frac{p(p-1)+i(i-1)}{(p+i)(p+i-1)}$$

Puesto que en el juego o bien se gana o bien se pierde, el juego será justo cuando la probabilidad anterior sea 0.5

$$\begin{aligned}
\frac{p(p-1)+i(i-1)}{(p+i)(p+i-1)} &= \frac{1}{2} \\
2p^2 - 2p + 2i^2 - 2i &= (p+i)^2 - (p+i) \\
2p^2 - 2p + 2i^2 - 2i &= p^2 + i^2 + 2pi - p - i \\
p^2 - p + i^2 - i &= 2pi \\
p^2 + i^2 - 2pi &= p + i \\
(p-i)^2 &= p + i
\end{aligned}$$

Para resolver esta igualdad simplificaremos la expresión por medio de un cambio de variable $\alpha = p - i$. Así,

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha + 2i \\ \alpha^2 - \alpha - 2i &= 0 \\ \alpha &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8i}}{2} \end{aligned}$$

donde debemos entender que, al ser $p, i \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha = p - i \in \mathbb{Z}$, por lo que $1 + 8i$ debe de ser un cuadrado perfecto. Supongamos que existe $\beta \in \mathbb{N}$ de manera que $1 + 8i = \beta^2$. Nos interesa cómo debe de ser i, por lo que

$$i = \frac{\beta^2 - 1}{8} = \frac{(\beta-1)(\beta+1)}{8}$$

que podemos renombrar, para simplificar su expresión y cometiendo un abuso de notación por utilizar el mismo símbolo, como

$$i = \frac{\beta(\beta+2)}{8}$$

Recordemos que $i \in \mathbb{N}$, por lo que necesariamente $8 \mid \beta(\beta+2)$. Si β es impar, entonces, necesariamente $\beta + 2$ es impar, y el producto de impares es impar. Esto obliga a que $\beta = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$, lo que nos lleva a

$$i = \frac{2n(2n+2)}{8} = \frac{n(n+1)}{2}$$

que es la famosa expresión para la suma de los n primeros naturales consecutivos. Terminamos de resolver el valor de α

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\frac{n(n+1)}{2}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4n(n+1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(2n+1)^2}}{2} = \frac{1 \pm (2n+1)}{2}$$

de donde

$$\begin{array}{rcr} \alpha = n+1 & & \alpha = -n \\ \downarrow & p = \alpha + i & \downarrow \\ p = n + 1 + \dfrac{n(n+1)}{2} & & p = -n + \dfrac{n(n+1)}{2} \\ p = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} & & p = \dfrac{n(n-1)}{2} \end{array}$$

Lo que nos lleva a dos posibles composiciones del bombo:

$$\begin{array}{rll} & TIPO1 & TIPO2 \\ PARES & \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ IMPARES & \dfrac{n(n+1)}{2} & \dfrac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

que podemos observar que son similares (o más bien simétricas, con un ”delay” de una unidad natural; también puede notarse que en el bombo de tipo 2 ha de exigirse $n > 1$, mientras que en el de tipo 1 no existe esta exigencia). Esto se debe a que la probabilidad de ganar procede de obtener dos bolas de la misma categoría (par+par o impar+impar) lo que hace que la probabilidad proceda de los contrapesos que se ejerzan entre las categorias y no de las categorías en sí. Por esta razón, podemos simplificar la solución y decir que debe haber

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

bolas de un tipo y

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

bolas del otro tipo, siendo n cualquier número natural.