**Problema 3.** Un mecánico compra 74 piezas por 3326€ de dos tipos distintos: $A$ y $B$. Si cada pieza de tipo $A$ cuesta 29€ más que una del tipo $B$, y ambos precios son números enteros, ¿cuántas piezas ha comprado de cada tipo?

PROPUESTA:
Denotemos por $x$ e $y$ la cantidad de piezas del tipo $A$ y $B$ respectivamente que compra el mecánico a los precios $a$ y $b$. El enunciado garantiza que $a$ y $b$ son números enteros, y también parecería lógico asumir que las piezas son indivisibles y que por lo tanto $x$ e $y$ también son números enteros. Puesto que $x + y = 74$ y que $a = 29 + b$, la ecuación que determina el gasto de nuestro mecánico $ax + by = 3326$ puede reescribirse como

$$(29 + b)(74 - y) + by = 3326$$

de la que sólo nos interesan las soluciones enteras. Esta ecuación puede simplificarse a

$$74b - 29y = 1180$$

Puesto que $mcd(29, 74) = 1$ podemos utilizar el algorítmo de Euclides para escribir 1 como combinación lineal de 29 y 74.

| 74 | 29 | 16 | 13 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 1 | 4 | |

De esta manera

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4 \cdot 3 = \\ &= 13 - 4 \cdot (16 - 13) = 5 \cdot 13 - 4 \cdot 16 = \\ &= 5 \cdot (29 - 16) - 4 \cdot 16 = 5 \cdot 29 - 9 \cdot 16 = \\ &= 5 \cdot 29 - 9 \cdot (74 - 2 \cdot 29) = 23 \cdot 29 - 9 \cdot 74 \end{aligned}$$

de donde

$$1 = 74(-9) - 29(-23)$$

y por lo tanto

$$1 \cdot 1180 = 74(-9 \cdot 1180) - 29(-23 \cdot 1180)$$

y puesto que además $74 \cdot 29 - 29 \cdot 74 = 0$ entonces

$$1180 = 74(-9 \cdot 1180 + 29k) - 29(-23 \cdot 1180 + 74k)$$

lo que hace que todas las posibles soluciones de la ecuación que hemos planteado sean

$$\begin{aligned} y &= -27140 + 74k \\ b &= -10620 + 29k \end{aligned}$$

Se trata de encontrar un valor que $k$ que haga $y$ y $b$ estrictamente positivos, pues no tiene sentido el hablar de una cantidad de piezas negativo o un precio negativo. Esto se puede hacer por tanteo, llegando a que para $k = 373$ tendremos $y = 18$ y $b = 23$. Esto nos lleva a concluir que el mecánico compra 56 piezas del tipo $A$ a un precio de 52€ y 18 piezas del tipo $B$ a un precio de 23€, pudiendo comprobar que esta combinación tiene efectivamente un coste de $56 \cdot 52 + 23 \cdot 18 = 3326$€