Ejercicio 1. Hallar todas las raíces de la ecuación

$$z^3 - (8+i)z^2 + (24+4i)z - (24-6i) = 0$$

teniendo en cuenta que el producto de dos de ellas es $15+9i$

PROPUESTA:
El teorema fundamental del álgebra garantiza que la ecuación dada, al ser de grado 3, tiene tres raíces en el cuerpo de los complejos. Las denotamos por z_1, z_2 y z_3. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $z_1 \cdot z_2 = 15+9i$. Además, ha de suceder que

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) = 0$$

Desarrollando esta expresión,

$$\begin{aligned}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) &= (z-z_1)(z^2-(z_2+z_3)z+z_2z_3) = \\ &= z^3-(z_2+z_3)z^2+z_2z_3z-z_1z^2+z_1(z_2+z_3)z-z_1z_2z_3 = \\ &= z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)z-z_1z_2z_3\end{aligned}$$

Notese que estos coeficientes asocioados con los coeficientes de la ecuación original es lo que se conoce como fórmula de Cardano-Vieta:

$$\begin{aligned}z_1+z_2+z_3 &= 8-i \\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 &= 24+4i \\ z_1z_2z_3 &= 24-6i\end{aligned}$$

que podemos simplificar levemente a partir de la condición $z_1 \cdot z_2 = 15+9i$:

$$\begin{aligned}z_1+z_2+z_3 &= 8+i & & \\ 15+9i+z_1z_3+z_2z_3 &= 24+4i & \rightarrow & \quad z_1z_3+z_2z_3 = 9-5i \\ (15+9i)z_3 &= 24-6i & \rightarrow & \quad z_3 = \frac{24-6i}{15+9i}\end{aligned}$$

habiendo obtenido así la raíz z_3 que expresaremos de forma más aseada:

$$z_3 = \frac{24-6i}{15+9i} = \frac{(24-6i)(15-9i)}{15^2+9^2} = \frac{306-306i}{306} = 1-i$$

Sustituyendo en la primera ecuación de las tres anteriores tenemos que

$$z_1+z_2 = 8+i-(1-i) = 7+2i$$

y, por testar el proceso de cálculo realizado hasta ahora, sustituyendo en la segunda también tenemos

$$z_1+z_2 = \frac{9-5i}{1-i} = 7+2i$$

Nos encontramos en un punto en el que sabemos que z_1 y z_2 son dos números complejos que cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 7 + 2i \\ z_1 z_2 &= 15 + 9i \end{aligned}$$

De esta igualdad podemos deducir que, por ejemplo, $z_1 = (7+2i) - z_2$, expresión que podemos sustituir en la condición $z_1 \cdot z_2 = 15 + 9i$, dando lugar a la ecuación sobre z_2

$$(7 + 2i - z_2) \cdot z_2 = 15 + 9i \to z_2^2 - (7+2i)z_2 + (15+9i) = 0$$

cuyas raíces son

$$z_2 = \frac{7 + 2i \pm \sqrt{(7+2i)^2 - 4(15+9i)}}{2} = \frac{7 + 2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2}$$

Para calcular $\sqrt{-15-8i}$ asumimos que existe un complejo $a + bi$ tal que $(a+bi)^2 = -15 - 8i$, lo que nos llevaría al sistema no lineal

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= -15 \\ 2ab &= -8 \end{aligned}$$

Tomando $b = -4/a$, y resolviendo la ecuación

$$a^2 - \left(\frac{-4}{a}\right)^2 = -15 \to a^4 + 15a^2 - 16 = 0$$

encontramos que

$$\begin{aligned} &a^2 = 1 \to a = \pm 1 \to b = \mp 4 \\ &a^2 = -16 \to a = \pm 4i \to b = \mp\frac{1}{i} = \pm i \end{aligned}$$

que en el fondo son todas la misma solución puesto que $\sqrt{-15-8i}$ suma y resta en la expresión de z_2. Por esto, podemos decir que $\sqrt{-15-8i} = 1 - 4i$, lo que nos permite simplificar z_2 para llegar a una de las dos situaciones siguientes

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{7 + 2i + (1-4i)}{2} = 4 - i \to z_1 = 7 + 2i - (4 - i) = 3 + 3i \\ z_2 &= \frac{7 + 2i - (1-4i)}{2} = 3 + 3i \to z_1 = 7 + 2i - (3 + 3i) = 4 - i \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que las tres raíces de la ecuación son

$$z_1 = 3 + 3i \qquad z_2 = 4 - i \qquad z_3 = 1 - i$$