

MATEMÁTICAS

PARA OPOSITORES

71 temas fundamentados y resumidos

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

José María Sánchez Reales

Matemáticas para opositores

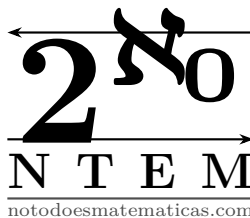
71 temas fundamentados y resumidos

CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA
Especialidad de Matemáticas

MATEMÁTICAS PARA OPOSITORES

71 temas fundamentados y resumidos

José María Sánchez Reales



Primera edición, octubre 2026
EDICIÓN DE ESCRITORIO

Matemáticas para opositores: 71 temas fundamentados y resumidos

© 2026, José María Sánchez Reales

Todos los derechos reservados. Bajo las sanciones establecidas en las leyes, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático.

Edición: Primera edición, octubre 2026

ISBN: 979-81-7245-944-3

Depósito Legal: AL 1118-2026

Impreso en: España / Impresión bajo demanda

Si deseas contactar con el autor:

notodoesmaticas@gmail.com / www.notodoesmaticas.com

Índice general

Presentación	v
Parte I. Temario desarrollado	1
Temario oficial	3
Desarrollo de los temas	??
Parte II. Material complementario	569
Ideas clave y mapas conceptuales	571
Notación	715
Bibliografía comentada	733
Contextualización de los temas	759
Normativa autonómica	773

Presentación

Sobre el autor

José María Sánchez Reales es doctor en Matemáticas (Premio Extraordinario de Doctorado) y funcionario de carrera de Enseñanza Secundaria para la Junta de Andalucía. Tras cinco años de trayectoria en investigación y docencia universitaria durante su etapa predoctoral, obtuvo su plaza en el cuerpo de profesores en su primera participación en el proceso selectivo, sin contar con experiencia previa en esta etapa educativa.

Desde hace años desarrolla una labor continua de divulgación a través del canal de YouTube @notodoesmatematicas y de la web notodoesmatematicas.com, donde comparte material en abierto de nivel avanzado tanto para el ámbito universitario como para la preparación de oposiciones.

Contextualización y crítica

El temario oficial para la prueba de oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, en la especialidad de Matemáticas, consta de 71 temas de los que únicamente se especifica el título. No existe ningún desarrollo oficial que determine qué contenidos deben incluirse, con qué profundidad han de tratarse o cómo deben relacionarse. El aspirante debe transformar cada título abierto en una exposición matemática coherente, rigurosa y completa, adaptada a los requisitos formales de una oposición —justificación normativa y curricular, contextualización, valoración histórica y epistemológica...—. Todo ello está condicionado, además, por el tiempo máximo disponible para desarrollar el tema a mano en el ejercicio escrito.

Esa dificultad rara vez la resuelven los materiales comerciales o tradicionales, que suelen incurrir en alguno, y a veces en más de uno, de estos cuatro grandes defectos:

Contenido insuficiente: Guiones y desarrollos esquemáticos que, tomados como contenido final, pueden resultar insuficientes para desarrollar el tema

con la profundidad necesaria y que, tomados como guía, aunque ahorran el tiempo dedicado a la selección de contenidos, obligan a redactar, completar y dar cuerpo al tema desde cero.

Contenido excesivo: Textos enciclopédicos e inviables en extensión que, tomados como contenido final, resultan irrealizables por las limitaciones de tiempo y que, tomados como guía, aunque ahorran el tiempo de búsqueda bibliográfica, obligan a seleccionar, resumir y reestructurar el tema desde cero.

Falta de cohesión («copia y pega»): Agregados inconexos de fragmentos de manuales o fuentes heterogéneas que, aunque, evaluados párrafo a párrafo, quizá contengan matemáticas correctas, carecen de fluidez, de transiciones naturales, de una jerarquía expositiva adecuada y de una cohesión interna.

Desprecio de los aspectos formales: Desarrollos centrados exclusivamente en el contenido matemático puro que ignoran la contextualización, la fundamentación curricular, la perspectiva histórica o la valoración crítica exigidas en la prueba.

En cualquiera de estos casos, el opositor cree disponer de un temario completo, pero en realidad le queda por delante un inmenso trabajo de adaptación.

Tampoco la inteligencia artificial representa una solución real. Aunque estas herramientas destacan por su capacidad para generar respuestas inmediatas y aparentemente verosímiles, por ahora carecen del criterio matemático y de la visión de conjunto que exige este proceso selectivo. La IA tiende a acumular información sin una jerarquía clara, incurre con frecuencia en imprecisiones lógicas o demostraciones superficiales que pasan desapercibidas a primera vista, y es incapaz de adecuar la densidad conceptual a la limitación temporal del examen escrito a mano. En matemáticas, la apariencia de corrección no equivale a rigor, y un texto generado automáticamente sigue exigiendo un trabajo minucioso de revisión, síntesis y reescritura antes de convertirse en un tema realmente apto para estudiar.

Seleccionar contenidos, darles coherencia y presentarlos mediante un discurso depurado requiere, en cualquiera de los casos, tiempo. Mucho tiempo. Si elaborar un solo tema ya resulta exigente, podemos imaginar la dedicación necesaria para preparar los 20, 25 o 30 que un opositor necesita estudiar.

Criterios de elaboración

El valor fundamental de este libro reside en la honestidad intelectual y en un respeto profundo por la propia disciplina, priorizando en todo momento el rigor y la densidad conceptual frente a cualquier simplificación artificiosa. Todos los criterios de elaboración que se detallan a continuación —cumplidos de manera

efectiva en la redacción de cada tema— han quedado siempre subordinados a esta premisa irrenunciable:

Estructura uniforme. Los temas siguen, en general, una estructura uniforme, aunque flexible y siempre supeditada a la naturaleza de los contenidos. Un patrón estable facilita la orientación, el estudio y la reproducción escrita.

Extensión viable. Los temas tienen una extensión media de 1900 palabras, con una desviación típica de 82 palabras. Este volumen de contenido representa la frontera entre un tema incompleto y un tema inviable, y constituye una extensión realista para su redacción íntegra a mano en un tiempo máximo de dos horas.

Contenido esencial. Se seleccionan los conceptos, resultados y razonamientos que caracterizan y fundamentan cada tema, cuidando que no falte nada esencial de lo exigido por su título y descartando lo superfluo, ornamental o retórico que desvíe la atención de lo importante.

Justificación conceptual. Cada definición, resultado, demostración, ejemplo o aplicación cumple una función reconocible dentro del hilo argumental.

Continuidad expositiva. Los contenidos conforman un discurso cohesionado, con una jerarquía clara y conexiones naturales entre sus apartados. No son una mera acumulación de fragmentos independientes.

Figuras significativas. Se incorporan únicamente figuras que aclaren la exposición, refuercen la comprensión teórica y aporten un valor explicativo real al discurso.

Rigor y claridad. La profundidad y la precisión matemática se combinan con un lenguaje claro y una redacción directa, de modo que la concisión no sacrifique el fundamento de las ideas ni la comprensión de los razonamientos. La expresión sintetiza la exposición sin reducirla a un mero esquema.

Mínima variedad accidental. Cuando distintos temas comparten objetos o desarrollos matemáticos, se procura mantener los mismos elementos —ejemplos, datos, notación y representaciones—, adaptados al contexto de cada caso particular. De este modo se reduce la carga cognitiva de aprender variantes innecesarias y se facilita el reconocimiento de estructuras comunes. Asimismo, cada tema conserva su plena autonomía: no se fuerza ninguna coincidencia ni se sacrifica rigor para uniformar la exposición.

Coherencia entre desarrollo y síntesis. Las ideas clave y los mapas conceptuales se conciben como formas complementarias de representar el desarrollo de cada tema. Se conserva la correspondencia entre sus conceptos, resultados, notación y relaciones, de modo que la síntesis facilite reconstruir el razonamiento sin alterar su significado ni ocultar condiciones esenciales.

Adecuación al proceso selectivo. Se cuidan con esmero la contextualización, la justificación normativa y curricular, las referencias históricas y epistemológicas y la valoración crítica de los contenidos, tomando como referencia los criterios de evaluación y las rúbricas de calificación de las convocatorias más recientes.

Fundamentación bibliográfica. Las decisiones matemáticas se apoyan en referencias especializadas; cada tema concluye con una bibliografía específica de referenciación simplificada, cuyas entradas se recogen y comentan de forma completa en la bibliografía general.

Organización del libro

El libro se organiza en dos partes: *Temario desarrollado* y *Material complementario*.

Temario desarrollado

La primera parte presenta el temario oficial a modo de índice paginado, seguido del desarrollo de cada uno de los 71 temas. Estos temas se han clasificado internamente en seis bloques según su área matemática. Esta clasificación representa una primera aproximación contextual al tema y facilita establecer relaciones entre sus contenidos y el resto del temario, así como con los contenidos propios del currículo de secundaria.

Área principal	Temas
Aritmética y Números	T01–T10
Álgebra	T11–T20
Funciones y Análisis	T21–T33
Geometría	T34–T56
Estadística y Probabilidad	T57–T68
Matemática Fundamental	T69–T71

El desarrollo de cada tema también se ha llevado a cabo bajo unos criterios claros de estructura y contenido. Así, siempre se comienza con el título oficial y un índice. Esto no es solo una cuestión de preferencia estética, sino un requisito formal contemplado en los criterios de evaluación y en las rúbricas de calificación: el enunciado oficial debe figurar de manera literal y el tema ha de incluir un índice de contenidos.

De nuevo en consonancia con los criterios de evaluación y las rúbricas de corrección, el cuerpo de cada tema sigue una estructura común articulada en cuatro partes diferenciadas:

Introducción. Se distribuye en seis párrafos: introduce el tema desde una perspectiva general; aborda sus componentes epistemológico e histórico; presenta la estructura bajo la que se desarrollará; contextualiza los contenidos dentro del temario y proporciona la justificación normativa y curricular.

Desarrollo. Es el núcleo del tema y se organiza en secciones y subsecciones en función de los requisitos particulares y de la naturaleza de los contenidos. En ellas se presentan los conceptos, resultados y razonamientos esenciales, junto con las demostraciones, ejemplos, procedimientos, aplicaciones o figuras que ayudan a comprenderlos. Al estudiarlo, importa reconocer tanto el contenido de cada apartado como la relación que lo une a los demás; es decir, resulta fundamental mantener la cohesión interna. Siempre que esta estructura no desnaturalice el discurso matemático, las secciones del tema coinciden literalmente con los apartados propuestos por el título, facilitando al corrector la identificación explícita de todos los contenidos del tema.

Conclusiones. Se distribuyen en dos párrafos: reconstruyen el recorrido matemático remarcando las conexiones entre los conceptos y resultados centrales del tema e interpretan la importancia y el alcance de este recorrido dentro de los contextos más pertinentes: la propia matemática, el desarrollo de las ciencias y la tecnología o el desarrollo cognitivo y formativo del individuo.

Bibliografía. Reúne entre cuatro y seis referencias especializadas relevantes —es decir, que guardan una relación directa con los contenidos del tema y se citan en su desarrollo—. Se presentan de forma simplificada; la referencia completa y los comentarios sobre su aportación se encuentran en la bibliografía comentada de la segunda parte.

Para facilitar el seguimiento de cada tema de forma independiente, se incorpora un doble sistema de paginación: una numeración global del libro, situada a pie de página, y una numeración interna y autónoma para cada tema, reflejada en su propio índice y dispuesta en la cabecera.

Material complementario

La segunda parte reúne cinco secciones que te ayudarán tanto a orientar la selección inicial de los temas como a afrontar su estudio efectivo y su posterior repaso.

Ideas clave y mapas conceptuales. Cada tema cuenta con un resumen, a modo de esquema, de sus ideas esenciales y un mapa conceptual que muestra la organización de sus apartados y sus conexiones internas. Se presentan en páginas enfrentadas: las ideas clave a la izquierda y el mapa conceptual a la derecha. Ambos recursos te ayudan a señalar lo esencial, comprender la estructura interna y resaltar las conexiones entre los distintos apartados. El

objetivo es que estas estructuras te permitan detectar las ideas principales y sus conexiones internas de manera que se favorezca la adquisición de los contenidos. De la misma manera, deben ayudarte a reconstruir el desarrollo exhaustivo y formal del tema en la fase de repaso.

Notación. Reúne los símbolos y convenciones utilizados en el libro, con su significado según el contexto, para facilitar la consulta durante el estudio y evitar ambigüedades.

Bibliografía comentada. Reúne, sin repeticiones, las obras citadas en los temas, con sus referencias completas, una breve presentación de su contenido y un comentario sobre lo que aportan a cada uno de los temas que las utilizan. Cada comentario se identifica mediante el número del tema correspondiente y justifica la pertinencia de la referencia. Además, si lo deseas, puedes localizar las fuentes originales para contrastar o ampliar un contenido concreto.

Contextualización de los temas. Presenta mediante grafos las relaciones entre los temas y los bloques del temario. Cada bloque ocupa dos páginas enfrentadas: las descripciones de los enlaces a la izquierda y el grafo correspondiente a la derecha. Consultarlos te permite reconocer contenidos compartidos y conexiones que pueden ayudarte a elegir los temas por su afinidad. Además, esta sección fundamenta el apartado de contextualización en la introducción de cada uno de los temas.

Normativa autonómica. Recopila las referencias normativas de cada comunidad para que puedas completar la etiqueta [NORMATIVA AUTONÓMICA] que aparece en los temas. Antes de utilizarla, comprueba su vigencia y su adecuación a tu convocatoria. Ten presente la frecuencia con la que se modifica la normativa.

Valor real de este libro

El autor lleva años publicando materiales de libre acceso de matemáticas de nivel avanzado. Por ello, resulta honesto señalar que lo que se adquiere en este volumen no es un conocimiento inaccesible —que puede construirse a partir de multitud de recursos bibliográficos accesibles o de otros recursos en abierto como los que el propio autor facilita—, sino tiempo y margen de elección.

El valor fundamental de esta obra radica en disponer de la totalidad del temario desarrollado en su versión final y depurada, listo para estudiar sin un trabajo previo de síntesis o redacción. Esto permite comparar el contenido completo de los temas antes de seleccionarlos, en lugar de decidir únicamente por la impresión que produce su título, y elegir aquellos cuya estructura y contenido se adapten mejor a tus preferencias personales o a tu perfil de estudio. Contar con todas las posibilidades facilita también organizar un itinerario gradual de preparación.

Si dispones del tiempo suficiente para elaborar tus propios resúmenes desde fuentes primarias, no necesitas este libro; si tu prioridad es optimizar tu estrategia y comenzar a estudiar desde el primer día, aquí encontrarás la herramienta adecuada.

Las cosas claras

Ningún manual garantiza por sí solo la superación de una oposición: el resultado depende también de la comprensión, la constancia, la capacidad de sacrificio y el entrenamiento específico para la prueba. Aquí es donde entras tú.

1) Un tema de 1900 palabras es una extensión realista, pero exigente.

Si no practicas la redacción del tema, corres el peligro de omitir contenido o de exceder el tiempo previsto. Ambas situaciones pueden perjudicar la calificación. En el primer caso, las omisiones pueden dejar incompletos los argumentos o dificultar la comprensión del conjunto. En el segundo caso, según el formato de la prueba, podrías dedicar más tiempo del previsto a la elaboración del tema, pero se lo restarías a la resolución de problemas, al caso práctico o a la parte asociada que se desarrolle conjuntamente.

2) Adaptar un tema exige comprenderlo y verificar los cambios.

Los temas se presentan en una versión final, lista para estudiar. Esto no impide que adaptes su contenido y su forma de exposición para hacerlos tuyos. Cada modificación exige, no obstante, comprobar que se conservan las hipótesis, la validez de los argumentos y el significado de los enunciados, así como la cohesión del conjunto y la precisión del lenguaje matemático.

No es lo mismo lo que se dice que lo que se quiere decir.

Frase A: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$

Frase B: $\exists \delta > 0 \forall \epsilon > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$

Estadísticas

Tema	pp/Pal	R/Dm	E/F/T	Tema	pp/Pal	R/Dm	E/F/T
T01	8/1943	6/4	5/1/1	T37	6/1800	5/5	5/2/0
T02	8/2013	3/3	7/7/3	T38	8/1963	3/3	3/4/1
T03	8/1951	11/7	8/2/2	T39	7/1880	7/7	2/7/0
T04	8/1998	11/10	2/0/0	T40	6/1778	2/2	4/3/0
T05	8/1810	7/6	3/1/0	T41	7/1915	2/2	4/4/1
T06	8/2011	10/9	2/2/0	T42	7/1909	4/4	5/1/0
T07	8/1897	4/3	6/1/1	T43	7/1908	2/2	3/3/2
T08	8/1810	5/5	4/1/0	T44	7/1964	3/3	5/2/0
T09	8/1834	6/5	1/3/0	T45	7/1969	2/2	5/3/1
T10	7/1976	4/3	1/0/1	T46	7/1883	3/2	6/3/0
T11	8/2064	10/9	5/1/1	T47	7/1882	2/2	3/2/0
T12	8/2095	8/8	6/1/0	T48	7/1986	3/2	3/2/1
T13	8/1994	9/9	5/1/0	T49	7/1938	3/2	5/2/1
T14	7/1980	7/7	4/2/0	T50	7/1920	2/2	3/2/0
T15	7/1793	4/4	6/1/0	T51	8/1937	2/2	6/3/1
T16	7/1697	5/5	3/1/2	T52	8/2012	2/2	4/3/0
T17	7/1952	4/3	4/1/1	T53	7/1913	2/2	5/2/0
T18	8/1953	6/5	3/2/0	T54	8/1895	2/2	3/4/2
T19	7/1803	8/8	5/1/0	T55	7/1861	3/2	3/3/0
T20	6/1853	2/2	2/1/0	T56	7/1966	2/2	1/3/1
T21	8/1854	4/4	8/1/1	T57	7/1833	2/2	2/2/2
T22	7/1789	2/2	6/2/1	T58	7/1955	2/2	2/2/1
T23	7/1780	2/2	6/4/0	T59	7/1911	2/2	3/2/1
T24	7/1757	4/4	5/1/1	T60	7/1917	2/2	4/1/1
T25	7/1798	4/4	7/4/0	T61	7/1771	2/2	5/2/1
T26	8/1963	10/10	6/3/1	T62	7/1958	2/2	3/2/0
T27	8/1986	4/4	6/2/1	T63	7/1845	2/2	6/2/0
T28	7/1804	3/3	3/3/2	T64	8/1815	2/2	7/2/2
T29	8/1880	7/7	4/3/0	T65	7/1809	2/2	5/1/1
T30	8/1817	4/4	7/3/0	T66	8/1978	3/2	5/2/1
T31	8/1906	2/2	3/3/1	T67	7/1932	2/2	4/1/1
T32	7/1810	2/2	4/3/0	T68	7/1797	2/2	5/2/1
T33	7/1884	2/2	4/3/0	T69	8/2019	2/2	4/3/1
T34	7/1912	2/2	2/2/0	T70	8/1946	2/2	7/1/1
T35	7/1970	3/2	5/2/1	T71	7/1975	4/2	1/1/2
T36	7/1820	2/2	6/2/0				
Total	521/134897	276/253	305/155/48				

pp páginas / **Pal** palabras totales; **R** resultados / **Dm** demostraciones; **E** ejemplos / **F** figuras / **T** tablas.

PARTE I

Temario desarrollado

Temario oficial

Temario de la especialidad de Matemáticas del Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, aprobado por la Orden de 9 de septiembre de 1993 y publicado en el Boletín Oficial del Estado de 21 de septiembre de 1993 (BOE-A-1993-23257).

Tema 01: Números naturales. Sistemas de numeración.	7
Tema 02: Fundamentos y aplicaciones de la teoría de grafos. Diagramas en árbol.	15
Tema 03: Técnicas de recuento. Combinatoria.	23
Tema 04: Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia.	31
Tema 05: Números racionales.	39
Tema 06: Números reales. Topología de la recta real.	47
Tema 07: Aproximación de números. Errores. Notación científica.	55
Tema 08: Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones.	63
Tema 09: Números complejos. Aplicaciones geométricas.	71
Tema 10: Sucesivas ampliaciones del concepto de número. Evolución histórica y problemas que resuelve cada una.	79
Tema 11: Conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Estructuras algebraicas.	87
Tema 12: Espacios vectoriales. Variedades lineales. Aplicaciones entre espacios vectoriales. Teorema de isomorfía.	95
Tema 13: Polinomios. Operaciones. Fórmula de Newton. Divisibilidad de polinomios. Fracciones algebraicas.	103
Tema 14: Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. Aproximación numérica de raíces.	111
Tema 15: Ecuaciones diofánticas.	119
Tema 16: Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan.	127

Tema 17: Programación lineal. Aplicaciones.	135
Tema 18: Matrices. Álgebra de matrices. Aplicaciones al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza.	143
Tema 19: Determinantes. Propiedades. Aplicación al cálculo del rango de una matriz.	151
Tema 20: El lenguaje algebraico. Símbolos y números. Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve. Evolución histórica del álgebra.	159
Tema 21: Funciones reales de variable real. Funciones elementales; situaciones reales en las que aparecen. Composición de funciones.	165
Tema 22: Funciones exponenciales y logarítmicas. Situaciones reales en las que aparecen.	173
Tema 23: Funciones circulares e hiperbólicas y sus recíprocas. Situaciones reales en las que aparecen.	181
Tema 24: Funciones dadas en forma de tabla. Interpolación polinómica. Interpolación y extrapolación de datos.	189
Tema 25: Límites de funciones. Continuidad y discontinuidades. Teorema de Bolzano. Ramas infinitas.	197
Tema 26: Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones.	205
Tema 27: Desarrollo de una función en serie de potencias. Teorema de Taylor. Aplicaciones al estudio local de funciones.	213
Tema 28: Estudio global de funciones. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones.	221
Tema 29: El problema del cálculo del área. Integral definida.	229
Tema 30: Primitiva de una función. Cálculo de algunas primitivas. Aplicaciones de la integral al cálculo de magnitudes geométricas.	237
Tema 31: Integración numérica. Métodos y aplicaciones.	245
Tema 32: Aplicación del estudio de funciones a la interpretación y resolución de problemas de la Economía, las Ciencias Sociales y la Naturaleza.	253
Tema 33: Evolución histórica del cálculo diferencial.	261
Tema 34: Análisis y formalización de los conceptos geométricos intuitivos: incidencia, paralelismo, perpendicularidad, ángulo, etc.	269
Tema 35: Las magnitudes y su medida. Fundamentación de los conceptos relacionados con ellas.	277
Tema 36: Proporciones notables. La razón áurea. Aplicaciones.	285

Tema 37: La relación de semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Thales. Razones trigonométricas.	293
Tema 38: Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones. . .	299
Tema 39: Geometría del triángulo.	307
Tema 40: Geometría de la circunferencia. Ángulos en la circunferencia. Potencia de un punto a una circunferencia.	315
Tema 41: Movimientos en el plano. Composición de movimientos. Aplicación al estudio de las teselaciones del plano. Frisos y mosaicos.	321
Tema 42: Homotecia y semejanza en el plano.	329
Tema 43: Proyecciones en el plano. Mapas. Planisferios terrestres: principales sistemas de representación.	337
Tema 44: Semejanza y movimientos en el espacio.	345
Tema 45: Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos. . .	353
Tema 46: Distintas coordenadas para describir el plano o el espacio. Ecuaciones de curvas y superficies.	361
Tema 47: Generación de curvas como envolventes.	369
Tema 48: Espirales y hélices. Presencia en la Naturaleza, en el Arte y en la Técnica.	377
Tema 49: Superficies de revolución. Cuádricas. Superficies regladas. Presencia en la Naturaleza, en el Arte y en la Técnica.	385
Tema 50: Introducción a las geometrías no euclídeas. Geometría esférica. . .	393
Tema 51: Sistemas de referencia en el plano y en el espacio. Ecuaciones de la recta y del plano. Relaciones afines.	401
Tema 52: Producto escalar de vectores. Producto vectorial y producto mixto. Aplicaciones a la resolución de problemas físicos y geométricos.	409
Tema 53: Relaciones métricas: perpendicularidad, distancias, ángulos, áreas, volúmenes, etc.	417
Tema 54: Las cónicas como secciones planas de una superficie cónica. Estudio analítico. Presencia en la Naturaleza, el Arte y la Técnica.	425
Tema 55: La Geometría fractal. Nociones básicas.	433
Tema 56: Evolución histórica de la geometría.	441
Tema 57: Usos de la Estadística: Estadística descriptiva y Estadística inferencial. Métodos básicos y aplicaciones de cada una de ellas.	449
Tema 58: Población y muestra. Condiciones de representatividad de una muestra. Tipos de muestreo. Tamaño de una muestra.	457

Tema 59: Técnicas de obtención y representación de datos. Tablas y gráficas estadísticas. Tendenciosidad y errores más comunes.	465
Tema 60: Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades. . . .	473
Tema 61: Desigualdad de Tchebyshev. Coeficiente de variación. Variable normalizada. Aplicación al análisis, interpretación y comparación de datos estadísticos.	481
Tema 62: Series estadísticas bidimensionales. Regresión y correlación lineal. Coeficiente de correlación. Significado y aplicaciones.	489
Tema 63: Frecuencia y probabilidad. Leyes del azar. Espacio probabilístico.	497
Tema 64: Probabilidad compuesta. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Teorema de Bayes.	505
Tema 65: Distribuciones de probabilidad de variable discreta. Características y tratamiento. Las distribuciones binomial y de Poisson. Aplicaciones.	513
Tema 66: Distribuciones de probabilidad de variable continua. Características y tratamiento. La distribución normal. Aplicaciones.	521
Tema 67: Inferencia estadística. Test de hipótesis.	529
Tema 68: Aplicaciones de la Estadística y el Cálculo de Probabilidades al estudio y toma de decisiones en problemas de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza. Evolución histórica.	537
Tema 69: La resolución de problemas en Matemáticas. Estrategias. Importancia histórica.	545
Tema 70: Lógica proposicional. Ejemplos y aplicaciones al razonamiento matemático.	553
Tema 71: La controversia sobre los fundamentos de la Matemática. Las limitaciones internas de los sistemas formales.	561

CONTENIDO NO MOSTRADO

CONTENIDO NO MOSTRADO

TEMA 11

Conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Estructuras algebraicas.

ÍNDICE

1	Introducción	1
2	Lenguaje y construcciones conjuntistas	2
3	Operaciones y estructuras algebraicas	4
4	Morfismos y conservación de estructura	7
5	Conclusiones	8
	Bibliografía	8

1. Introducción

Un conjunto reúne objetos y permite estudiar las relaciones que mantienen entre sí. La teoría de conjuntos formaliza esta idea mediante la pertenencia, la inclusión y las correspondencias; al añadir operaciones aparecen las estructuras algebraicas.

Epistemológicamente, la abstracción algebraica prescinde de la naturaleza de los objetos y conserva las leyes de sus operaciones. Así estudia bajo una misma estructura sistemas distintos, como números y matrices.

Históricamente, la teoría de conjuntos precisó el infinito y la cardinalidad; el álgebra estructural pasó de resolver ecuaciones concretas a estudiar operaciones e invariantes [Stillwell (2010)].

A continuación, estudiaremos las ideas que formalizan el concepto de conjunto, establecen una aritmética de conjuntos y definen operaciones entre sus elementos. Las estructuras algebraicas surgirán al caracterizar las propiedades que estas operaciones cumplen o no.

Este tema pertenece a un bloque de Álgebra que englobaría los temas del 11 al 20 del temario oficial establecido por la Orden de 9 de septiembre de 1993. Fundamenta espacios vectoriales, polinomios y álgebra matricial (temas 12, 13, 18 y 19), las funciones (tema 21) y el análisis de los fundamentos matemáticos (tema 71).

En el marco de la LOMLOE, el RD 217/2022 y el RD 243/2022, reflejado a nivel autonómico por [NORMATIVA AUTONÓMICA], estos contenidos desarrollan principalmente el Sentido Algebraico, el Sentido Estocástico y la Resolución de Problemas, mediante la clasificación, la generalización y el reconocimiento de estructuras (Competencias Específicas 1, 2 y 5):

ESO. Conjuntos, diagramas, correspondencias y propiedades de las operaciones para organizar información y justificar regularidades (1.º-3.º de ESO; Matemáticas A y B de 4.º de ESO).

Bachillerato. Uso instrumental de conjuntos, relaciones, aplicaciones y estructuras en la formalización algebraica, funcional, geométrica y probabilística (Matemáticas I y II; Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II; Matemáticas Generales).

2. Lenguaje y construcciones conjuntistas

Conjuntos y operaciones

Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos, llamados elementos, considerada como una unidad. Sus elementos lo determinan, y la inclusión compara conjuntos mediante la pertenencia [Halmos (1960)].

DEFINICIÓN (INCLUSIÓN Y OPERACIONES) Dados conjuntos A y B , escribimos $A \subseteq B$ si todo elemento de A pertenece a B . Sus operaciones básicas son

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}, \quad \mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Dos conjuntos son iguales precisamente cuando se incluyen mutuamente:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

El conjunto vacío $\emptyset$ es el único que carece de elementos.

Para $A \subseteq U$, su *complementario* es $A^c = U \setminus A$. Unión e intersección son asociativas, conmutativas y distributivas. Las leyes de De Morgan son

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

El *producto cartesiano* $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ permite formalizar relaciones y aplicaciones.

Relaciones de equivalencia y de orden

DEFINICIÓN (RELACIÓN BINARIA) Una relación de A en B es un subconjunto $R \subseteq A \times B$. La notación aRb significa que $(a, b) \in R$.

DEFINICIÓN (EQUIVALENCIA) Una relación $\sim$ sobre A es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. La clase de $a \in A$ es $[a] = \{x \in A : x \sim a\}$, y el cociente $A/\sim$ es el conjunto de todas las clases.

DEFINICIÓN (PARTICIÓN) Una partición de A es una familia de subconjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos y cuya unión es A ; sus elementos se denominan bloques.

PROPOSICIÓN (EQUIVALENCIAS Y PARTICIONES) *Las clases de una equivalencia sobre A forman una partición. Recíprocamente, toda partición determina una única equivalencia cuyos bloques son sus clases.*

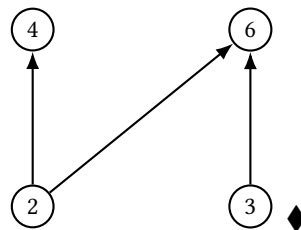
Demostración. La reflexividad hace que las clases cubran A ; si dos se cortan, simetría y transitividad las hacen iguales. Recíprocamente, «pertenecer al mismo bloque» es una equivalencia cuyas clases son los bloques. $\square$

Las equivalencias identifican elementos; los órdenes permiten compararlos.

DEFINICIÓN (RELACIÓN DE ORDEN) Un orden parcial es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva; es total si todos los elementos son comparables. En A , un elemento m es mínimo si $m \leq x$ para todo $x \in A$, y minimal si $x \leq m \Rightarrow x = m$. Las desigualdades inversas definen máximo y maximal.

Todo mínimo es minimal y único, pero puede haber varios minimales. La inclusión es un orden parcial; el orden real, total.

Ejemplo. En $A = \{2, 3, 4, 6\}$, ordenado por divisibilidad, cada flecha une un divisor con un múltiplo. Los elementos 2, 3 son minimales y 4, 6, maximales; no hay mínimo ni máximo.



Aplicaciones y cardinalidad

Las aplicaciones permiten relacionar de forma unívoca los elementos de dos conjuntos.

DEFINICIÓN (APLICACIÓN) Una aplicación $f : A \rightarrow B$ asigna a cada $a \in A$ un único $f(a) \in B$. Su gráfica es $\Gamma_f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$. Para $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, imagen y antiimagen son

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}, \quad f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Es inyectiva si $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$, sobreyectiva si $f(A) = B$ y biyectiva si cumple ambas propiedades.

La antiimagen no exige que f sea invertible.

Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, su *composición* es $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. La composición es asociativa y tiene por elementos neutros las aplicaciones identidad. La restricción a $X \subseteq A$ se denota $f|_X$.

PROPOSICIÓN (APLICACIONES INVERTIBLES) *Una aplicación admite inversa si y solo si es biyectiva.*

Demostración. Si g es inversa de f , $g \circ f = \text{id}_A$ implica inyectividad y $f \circ g = \text{id}_B$, sobreyectividad. Si f es biyectiva, asignar a cada elemento su único antecedente define la inversa. $\square$

Las antiimágenes conservan uniones, intersecciones y complementos. Las imágenes conservan uniones, pero en general solo satisfacen

$$f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X'),$$

con igualdad si f es inyectiva.

Dos conjuntos tienen *igual cardinal* si existe una biyección entre ellos. Un conjunto es *finito* si es biyectivo con $I_n = \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, con $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$; en otro caso es *infinito*.

Admitimos el siguiente resultado.

TEOREMA (CANTOR–SCHRÖDER–BERNSTEIN) Si existen inyecciones $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$, existe una biyección $A \rightarrow B$.

Un conjunto infinito puede ser equipotente a un subconjunto propio: $n \mapsto 2n$ establece una biyección entre $\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}$.

3. Operaciones y estructuras algebraicas

De las leyes de composición a los grupos

Las estructuras algebraicas surgen al imponer propiedades a una operación interna [Dummit y Foote (2004)].

DEFINICIÓN (LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA) Una ley interna en un conjunto no vacío A es una aplicación $*$: $A \times A \rightarrow A$.

El carácter interno depende del conjunto: la resta lo es en $\mathbb{Z}$, pero no en $\mathbb{N}$. Escribiremos $xy = x * y$. Al añadir propiedades se obtiene:

Estructura	Exigencia añadida	Caracterización
Semigrupo	Asociatividad	$(xy)z = x(yz)$
Monoide	Elemento neutro	Semigrupo con e tal que $ex = xe = x$
Grupo	Elementos inversos	Monoide con x^{-1} tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$
Grupo abeliano	Conmutatividad	Grupo en el que $xy = yx$

Ejemplo. Las palabras sobre un alfabeto, incluida la palabra vacía, forman un monoide con la concatenación; $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano, y las biyecciones de un conjunto forman un grupo no necesariamente abeliano. $\blacklozenge$

PROPOSICIÓN (UNICIDAD DEL NEUTRO Y DE LOS INVERSOS) En un grupo, el neutro y el inverso de cada elemento son únicos; además, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Demostración. Si e, e' son neutros, $e = ee' = e'$. Si y, z son inversos de x , la asociatividad da $y = y(xz) = (yx)z = z$. Por último, $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = (y^{-1}x^{-1})(xy) = e$. $\square$

Subgrupos y grupos cociente

Los subgrupos restringen la operación a un subconjunto estable; los cocientes identifican elementos de forma compatible con ella.

DEFINICIÓN (SUBGRUPO) Un subconjunto $H \subseteq G$ es subgrupo, $H \leq G$, si es grupo con la operación restringida.

DEFINICIÓN (SUBGRUPO NORMAL) Un subgrupo $N \leq G$ es normal, $N \trianglelefteq G$, si $gNg^{-1} = N$ para todo $g \in G$.

El siguiente criterio reúne el cierre por productos e inversos.

PROPOSICIÓN (CRITERIO DE SUBGRUPO) Un subconjunto H de un grupo G es subgrupo si y solo si $H \neq \emptyset$ y $xy^{-1} \in H$ para todos $x, y \in H$.

Demostración. Si H es subgrupo, contiene el neutro y es cerrado por inversos y productos, luego satisface la condición.

Recíprocamente, elegido $h \in H$, la condición aplicada a h, h da $e \in H$; aplicada a e, x , da $x^{-1} \in H$, y aplicada a x, y^{-1} , da $xy \in H$. La asociatividad se hereda de G , luego H es grupo. $\square$

Cada subgrupo divide G en clases laterales.

PROPOSICIÓN (CLASES LATERALES Y EQUIVALENCIA) Si $H \leq G$, la relación sobre G $x \sim_H y \iff x^{-1}y \in H$ es de equivalencia. Sus clases son los conjuntos $gH = \{gh : h \in H\}$, denominados clases laterales izquierdas.

Demostración. La reflexividad se sigue de $x^{-1}x = e \in H$; la simetría, de $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1}$, y la transitividad, de $x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z)$. Además, $x \sim_H y$ equivale a $y \in xH$, luego las clases son las laterales izquierdas. $\square$

El producto de clases no debe depender de sus representantes.

PROPOSICIÓN (GRUPO COCIENTE) Para un subgrupo $N \leq G$, el producto de clases está bien definido si y solo si N es normal. En ese caso, $G/N = \{gN : g \in G\}$ es un grupo con

$$(gN)(hN) = ghN.$$

Demostración. Supongamos N normal. Si $g' = gn$ y $h' = hm$, con $n, m \in N$, entonces

$$g'h' = gn hm = gh(h^{-1}nh)m \in ghN.$$

Así, $g'h'N = ghN$: el producto está bien definido. La asociatividad se hereda de G , la clase neutra es N y la inversa de gN es $g^{-1}N$.

Recíprocamente, si el producto está bien definido, $nN = N$ implica

$$(gN)(nN)(g^{-1}N) = N,$$

luego $gng^{-1} \in N$ y $gNg^{-1} \subseteq N$. Sustituir g por g^{-1} da la inclusión contraria y la normalidad. $\square$

En un grupo abeliano todo subgrupo es normal. En particular, $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$, y $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ reúne las clases $[a]_n = a + n\mathbb{Z}$, para $n \geq 2$.

Anillos y cuerpos

El paso de los grupos a los anillos consiste en añadir una segunda operación a un grupo abeliano.

DEFINICIÓN (ANILLO) Un anillo es un grupo abeliano aditivo con un producto asociativo y distributivo por ambos lados. Es conmutativo si el producto lo es, y unitario si posee identidad multiplicativa.

DEFINICIÓN (CUERPO) Un cuerpo es un anillo conmutativo y unitario, con $0 \neq 1$, en el que cada elemento no nulo posee inverso multiplicativo.

Ejemplo. $\mathbb{Z}$ es un anillo, pero no un cuerpo; $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sí son cuerpos. Los polinomios sobre un cuerpo forman un anillo conmutativo, mientras que las matrices cuadradas de tamaño fijo forman uno generalmente no conmutativo. $\blacklozenge$

Dos elementos no nulos a, b son *divisores de cero* si $ab = 0$. Un anillo conmutativo unitario, con $0 \neq 1$, y sin divisores de cero se denomina *dominio de integridad*; en él pueden cancelarse factores no nulos.

DEFINICIÓN (SUBANILLO) Un subanillo $S \subseteq A$ es un subgrupo aditivo cerrado bajo el producto.

DEFINICIÓN (IDEAL BILATERAL) Un subconjunto $I \subseteq A$ es un ideal bilateral si es un subgrupo aditivo y $aI, Ia \subseteq I$ para todo $a \in A$.

Un subanillo no tiene por qué contener la unidad del anillo ambiente.

Los ideales permiten definir suma y producto sobre las clases aditivas:

$$A/I = \{a + I : a \in A\}, \quad (a + I) + (b + I) = (a + b) + I,$$

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Al cambiar representantes, suma y producto varían en elementos de I , por lo que están bien definidos. Los axiomas se heredan de A : el cero es I , el opuesto de $a + I$ es $-a + I$ y, si A es unitario, la identidad es $1 + I$.

Ejemplo. En $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, las clases no nulas $[2]_6$ y $[3]_6$ cumplen $[2]_6[3]_6 = [0]_6$. Así, un anillo cociente puede poseer divisores de cero aunque el anillo de partida no los tenga. $\blacklozenge$

4. Morfismos y conservación de estructura

Los homomorfismos comparan estructuras conservando sus operaciones [Herstein (1975)].

DEFINICIÓN (HOMOMORFISMO) Un homomorfismo de grupos $f : G \rightarrow H$ satisface $f(xy) = f(x)f(y)$. En el caso de anillos, un homomorfismo $f : A \rightarrow B$ satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Si los anillos son unitarios, debe precisarse si se exige además $f(1) = 1$.

DEFINICIÓN (ISOMORFISMO) Un homomorfismo biyectivo es un isomorfismo.

En grupos, $f(e) = f(e)^2$ implica $f(e) = e_H$, y $f(x)f(x^{-1}) = e_H$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. En anillos se conservan cero y opuestos. Núcleo e imagen describen lo anulado y lo alcanzado.

DEFINICIÓN (NÚCLEO) El núcleo de un homomorfismo de grupos $f : G \rightarrow H$ es $\ker f = \{x \in G : f(x) = e_H\}$. Para un homomorfismo de anillos $f : A \rightarrow B$, es $\ker f = \{x \in A : f(x) = 0_B\}$.

DEFINICIÓN (IMAGEN) La imagen es $\text{Im } f = f(G)$ en grupos y $f(A)$ en anillos.

Núcleo e imagen heredan estructura.

PROPOSICIÓN (NÚCLEO E IMAGEN) En grupos, la imagen es un subgrupo y el núcleo, un subgrupo normal; en anillos, son un subanillo y un ideal bilateral, respectivamente.

Demostración. En grupos, $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1}$ prueba el cierre de imagen y núcleo; $f(gkg^{-1}) = e_H$, para $k \in \ker f$, prueba la normalidad. En anillos se conservan diferencias y productos, y $f(ak) = f(a)f(k) = 0 = f(k)f(a) = f(ka)$ da la absorción bilateral. $\square$

PROPOSICIÓN (CRITERIO DE INYECTIVIDAD) Un homomorfismo de grupos es inyectivo si y solo si su núcleo es trivial.

Demostración. La igualdad $f(x) = f(y)$ equivale a $xy^{-1} \in \ker f$, que implica $x = y$ exactamente cuando el núcleo es trivial. $\square$

Dos elementos tienen la misma imagen si y solo si pertenecen a la misma clase módulo el núcleo.

TEOREMA (PRIMER TEOREMA DE ISOMORFÍA) Si $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, la aplicación

$$G/\ker f \longrightarrow \text{Im } f, \quad x \ker f \longmapsto f(x),$$

es un isomorfismo. Análogamente, para un homomorfismo de anillos $f : A \rightarrow B$, se tiene $A/\ker f \cong \text{Im } f$.

Demostración. En grupos, sea $\varphi(x \ker f) = f(x)$. Como

$$x \ker f = y \ker f \iff y^{-1}x \in \ker f \iff f(x) = f(y),$$

queda bien definida y es inyectiva. Además,

$$\varphi((x \ker f)(y \ker f)) = f(xy) = f(x)f(y),$$

por lo que conserva el producto; es sobreyectiva por definición.

En anillos, sea $\psi(a + \ker f) = f(a)$. La equivalencia $a + \ker f = b + \ker f \iff f(a) = f(b)$ prueba la buena definición y la inyectividad; por definición es sobreyectiva. Las identidades $f(a + b) = f(a) + f(b)$ y $f(ab) = f(a)f(b)$ muestran que ψ conserva suma y producto. $\square$

Un isomorfismo presenta una misma estructura mediante objetos distintos.

Ejemplo. Para $n \geq 2$, la proyección $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a \mapsto [a]_n$, es sobreyectiva y tiene núcleo $n\mathbb{Z}$. El teorema identifica el cociente por $n\mathbb{Z}$ con la imagen de la proyección. $\blacklozenge$

5. Conclusiones

Los conjuntos proporcionan el lenguaje para distinguir pertenencia, comparación e identificación mediante aplicaciones, órdenes y equivalencias. Las operaciones añaden estructuras como grupos, anillos y cuerpos; los subgrupos y subanillos las restringen, mientras que los cocientes identifican elementos. La normalidad y los ideales garantizan que las operaciones entre clases estén bien definidas. Los homomorfismos relacionan estas construcciones, y el primer teorema de isomorfía expresa la conexión fundamental entre núcleo, cociente e imagen.

Este lenguaje permite reconocer leyes comunes en números, polinomios, matrices y funciones sin borrar las diferencias entre ellos. La abstracción hace posible trasladar resultados y métodos a contextos nuevos, reduciendo razonamientos repetidos a una misma estructura. Su aprendizaje desarrolla la capacidad de seleccionar las propiedades relevantes, distinguir objetos de representaciones y exigir que toda identificación o comparación conserve las relaciones que justifican su uso.

Bibliografía

- Dummit, D. S. y Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra*. Wiley.
Halmos, P. R. (1960). *Naive Set Theory*. Van Nostrand.
Herstein, I. N. (1975). *Topics in Algebra*. Wiley.
Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History*. Springer.

CONTENIDO NO MOSTRADO

CONTENIDO NO MOSTRADO

PARTE II

Material complementario

Ideas clave y mapas conceptuales

CONTENIDO NO MOSTRADO

CONTENIDO NO MOSTRADO

TEMA 11: CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.

ESQUEMA DE IDEAS PRINCIPALES

1. Conjuntos, relaciones y aplicaciones

- Inclusión y pertenencia definen unión, intersección, diferencia y complementario; doble inclusión prueba igualdad y De Morgan relaciona complementos.
- Las equivalencias identifican elementos y determinan particiones; los órdenes comparan elementos. Un mínimo es único y minimal, pero varios minimales pueden coexistir.
- Una aplicación fija dominio, codominio y una imagen única por elemento. Es invertible exactamente cuando es biyectiva; antiimagen no exige inversa.
- Antiimágenes conservan uniones, intersecciones y complementos. Las biyecciones comparan cardinales; una inyección en cada sentido garantiza una biyección.

2. Estructuras y cocientes

- Una ley interna opera dentro del conjunto. Asociatividad, neutro e inversos distinguen semigrupo, monoide y grupo; conmutatividad distingue el grupo abeliano.
- En un grupo, neutro e inversos son únicos. Un subconjunto no vacío es subgrupo si es cerrado bajo productos por inversos.
- Las clases laterales forman una partición. Su producto es independiente de representantes exactamente cuando el subgrupo es normal.
- Un anillo combina grupo aditivo y producto distributivo; un cuerpo incorpora inversos de todos los elementos no nulos. Un dominio carece de divisores de cero.
- Los subanillos conservan diferencias y productos; los ideales absorben productos externos y permiten construir anillos cociente.

3. Morfismos

- Los homomorfismos conservan operaciones; los isomorfismos son homomorfismos biyectivos. En anillos se explicita si deben conservar la unidad.
- Núcleo e imagen son subestructuras; el núcleo es normal en grupos e ideal en anillos. Un homomorfismo de grupos es inyectivo si su núcleo es trivial.
- El primer teorema de isomorfía identifica el cociente por el núcleo con la imagen: se agrupan exactamente los elementos indistinguibles por el morfismo.



CONTENIDO NO MOSTRADO

Notación

Este glosario reúne la notación utilizada en el conjunto del libro, incluidos los temas, las fichas de ideas clave y los mapas conceptuales. El significado de cada símbolo se precisa según su contexto; prevalecen las definiciones y los convenios expresamente indicados en cada desarrollo.

1. Lenguaje común

$\forall, \exists, \nexists$

Se leen «para todo», «existe al menos uno» y «no existe». En $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$, el natural puede depender de x ; intercambiar los cuantificadores cambia la afirmación.

$\exists!$

«Existe uno y solo uno». En $\exists! (q, r)$ la unicidad corresponde al par completo. En $\exists! (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ corresponde a toda la sucesión, dados los datos iniciales.

$\neg P, P \wedge Q, P \vee Q$

Negación, conjunción y disyunción inclusiva: «no P », « P y Q », « P o Q , o ambos». Las letras representan proposiciones o fórmulas en este contexto.

$P \Rightarrow Q, P \Leftrightarrow Q$

Implicación y equivalencia: «si P , entonces Q » y « P si y solo si Q ». También aparecen $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Una implicación no afirma su recíproca ni expresa por sí sola causalidad.

$=, \neq, \equiv, \approx, \propto$

Igualdad, desigualdad, equivalencia o congruencia según el contexto, aproximación y proporcionalidad. $y \propto x$ indica un factor constante en el contexto considerado; $\approx$ no afirma igualdad exacta. $\equiv$ es congruencia modular en aritmética y equivalencia lógica entre proposiciones.

CONTENIDO NO MOSTRADO

Bibliografía comentada

Las referencias siguientes reúnen, sin repeticiones, todas las obras citadas en el desarrollo de los temas. Cada entrada presenta su utilidad general y su relación específica con los temas que la emplean.

Apostol, T. M. (1984). *Calculus*. Reverté.

Tratado riguroso que integra funciones, álgebra, geometría y cálculo desde una perspectiva estructural.

Tema 8. Desarrolla las sucesiones, las propiedades de sus límites y su relación con las series.

Tema 21. Desarrolla las funciones elementales, sus operaciones y su papel como fundamento del cálculo.

Tema 22. Fundamenta la exponencial, la base natural y sus propiedades analíticas.

Tema 23. Fundamenta las funciones circulares, sus identidades y la medida en radianes.

Tema 25. Desarrolla continuidad, discontinuidades y propiedades globales en intervalos compactos.

Tema 26. Desarrolla la función derivada, sus reglas y las derivadas sucesivas.

Tema 27. Relaciona el teorema de Taylor con límites, aproximaciones y estudio local de funciones.

Tema 28. Desarrolla los criterios diferenciales de monotonía, extremos y convexidad.

Tema 29. Construye la integral definida a partir de sumas y desarrolla su interpretación geométrica.

Tema 30. Desarrolla las primitivas y deduce las técnicas elementales a partir de las reglas de derivación.

Tema 31. Relaciona las fórmulas de cuadratura con la integral definida y sus aplicaciones.

Tema 32. Proporciona las herramientas de derivación, optimización e integración aplicadas en los modelos.

Tema 46. Presenta coordenadas polares, cilíndricas y esféricas y sus aplicaciones.

Tema 52. Relaciona álgebra vectorial, geometría y aplicaciones del cálculo.

Apostol, T. M. (1986). *Análisis matemático*. Reverté.

Manual riguroso de análisis que desarrolla la topología de los espacios métricos y la estructura algebraica y las representaciones de los números complejos.

CONTENIDO NO MOSTRADO

Contextualización de los temas

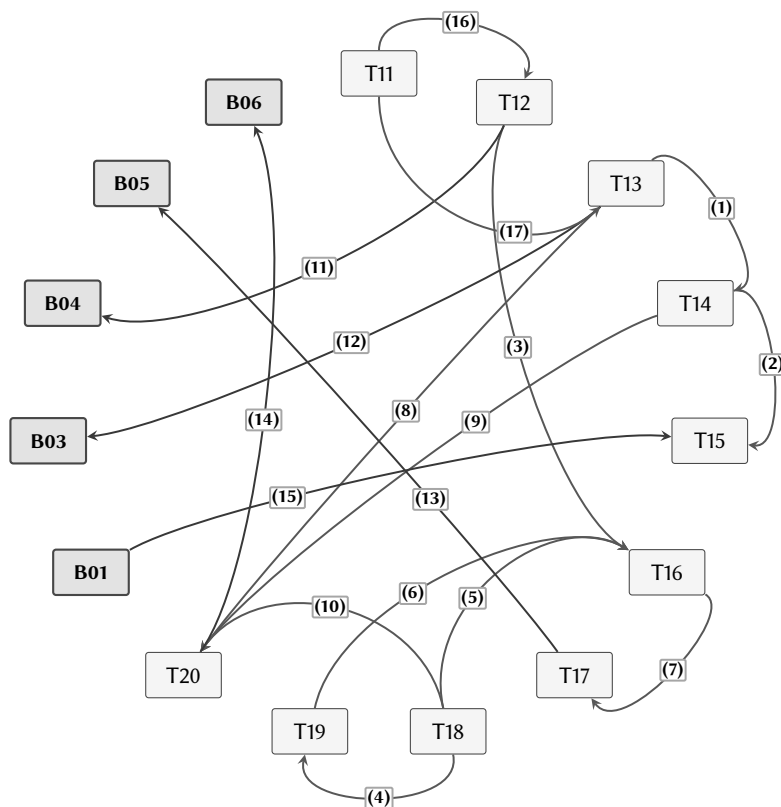
CONTENIDO NO MOSTRADO

CONTENIDO NO MOSTRADO

Bloque B02: Álgebra

- (1) La factorización de polinomios permite transformar ecuaciones y relacionar raíces, factores y multiplicidades, según el cuerpo de coeficientes.
- (2) Restringir las soluciones a los enteros plantea problemas diofánticos: divisibilidad y congruencias añaden condiciones a la resolución sobre los reales.
- (3) Los sistemas describen intersecciones de variedades afines. Una solución particular y el núcleo homogéneo determinan el conjunto solución.
- (4) El determinante detecta invertibilidad y describe el efecto de operaciones elementales y productos de matrices cuadradas.
- (5) Las matrices reúnen coeficientes; la eliminación transforma simultáneamente las ecuaciones, conservando las soluciones y simplificando su cálculo.
- (6) Los menores calculan rangos de la matriz y su ampliada. Compararlos decide compatibilidad; el número de incógnitas determina la unicidad.
- (7) Las inecuaciones delimitan la región factible. Resolver ecuaciones de sus fronteras permite localizar vértices y estudiar óptimos lineales.
- (8) Los polinomios convierten operaciones en expresiones generales, mostrando cómo el lenguaje algebraico permite estudiar familias de problemas.
- (9) Las ecuaciones separan datos, incógnitas y relaciones. Ilustran el poder del simbolismo y exigen conservar dominios y soluciones.
- (10) Las matrices ejemplifican objetos algebraicos con operaciones propias: su producto no conserva siempre la conmutatividad del producto numérico.
- (11) Bases, coordenadas y aplicaciones lineales representan direcciones y transformaciones de B04 sin depender de una referencia particular.
- (12) Los polinomios definen y aproximan funciones de B03. Raíces, derivadas y límites permiten analizar su comportamiento.
- (13) La programación lineal organiza decisiones con recursos limitados en B05, distinguiendo la optimización del modelo de la incertidumbre de sus datos.
- (14) El lenguaje algebraico evoluciona del cálculo a estructuras axiomáticas, enlazando con la formalización y la demostración de B06.
- (15) La aritmética de B01 fundamenta problemas diofánticos: Bézout construye soluciones y los residuos pueden descartar su existencia.
- (16) Conjuntos y operaciones definen estructuras. Un espacio vectorial combina un grupo aditivo con la acción de un cuerpo.
- (17) Los anillos fundamentan operaciones polinómicas; el dominio de coeficientes condiciona división, factorización e irreducibilidad.

Bloque B02: Álgebra



CONTENIDO NO MOSTRADO

Normativa autonómica

Andalucía

Normativa de ESO. Decreto 102/2023, de 9 de mayo, y Orden de 30 de mayo de 2023, que desarrolla el currículo, la atención a la diversidad, la evaluación y el tránsito entre etapas.

Normativa de Bachillerato. Decreto 103/2023, de 9 de mayo, y Orden de 30 de mayo de 2023, de desarrollo curricular, atención a la diversidad y evaluación.

Vigencia y modificaciones. Normas vigentes desde el curso 2023–2024; derogan los marcos curriculares andaluces de 2016 y 2021 en estas etapas.

Fuente oficial. BOJA núms. 90, de 15 de mayo de 2023, y 104, de 2 de junio de 2023. Consulta: 29 de agosto de 2026.

Aragón

Normativa de ESO. Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de ESO.

Normativa de Bachillerato. Orden ECD/1173/2022, de 3 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de Bachillerato.

Vigencia y modificaciones. La Orden ECD/1172/2022 está modificada por la Orden ECD/867/2024. La Orden ECD/1173/2022 está modificada por las Órdenes ECD/886/2024 y ECD/739/2025; deben emplearse sus textos actualizados.

Fuente oficial. BOA núms. 156 y 157, de 11 y 12 de agosto de 2022; núms. 153 y 154, de 7 y 8 de agosto de 2024, y núm. 127, de 4 de julio de 2025. Consulta: 29 de agosto de 2026.

CONTENIDO NO MOSTRADO

71 temas listos para estudiar

Este volumen reúne los **71 temas oficiales de Matemáticas** en desarrollos completos, rigurosos y depurados. Cada tema selecciona y conecta los contenidos esenciales, incorpora su fundamentación histórica y epistemológica, establece la vinculación curricular y culmina con conclusiones y referencias bibliográficas. El temario se completa con ideas clave, mapas conceptuales, notación, bibliografía comentada, grafos de relaciones y normativa autonómica. Una versión final, lista para estudiar sin un trabajo previo de síntesis o redacción.

Temas completos y rigurosos

Contextualización histórica, curricular y normativa; perspectiva epistemológica y juicio crítico; desarrollo matemático profundo, conectado y justificado.

Estructura precisa y homogénea

Una estructura común facilita el estudio sistemático y responde a las rúbricas de corrección y a los criterios oficiales de calificación vigentes.

Extensión realista

Extensión media aproximada de 1900 palabras, concebida para una redacción manual de dos horas, sin omitir conceptos esenciales ni añadir contenido superfluo.

Material complementario

Esquemas de ideas clave, mapas conceptuales, glosario de notación, bibliografía comentada, grafos de relaciones contextuales y referencias de normativa autonómica.

SOBRE EL AUTOR

José María Sánchez Reales es doctor en Matemáticas y funcionario de carrera de Enseñanza Secundaria para la Junta de Andalucía. Tras cinco años de investigación y docencia universitaria durante su etapa predoctoral, obtuvo plaza en su primera participación en el proceso selectivo. Desarrolla una labor continua de divulgación en el canal de YouTube @notodoesmatematicas y en notodoesmatematicas.com, donde comparte materiales avanzados para el ámbito universitario y la preparación de oposiciones.

Dirigido a: aspirantes al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria que buscan un temario completo, profundo y viable desde el primer día de estudio.