$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots a \\ b & x & a & \cdots a \\ b & b & x & \cdots a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots x \end{vmatrix}=F_1-F_2=\begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots 0 \\ b & x & a & \cdots a \\ b & b & x & \cdots a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ b & b & b & \cdots x \end{vmatrix}=\cdots$$

$$\cdots=(x-b)D_n+(x-a)\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots a \\ b & x & a & \cdots a \\ b & b & x & \cdots a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ b & b & b & \cdots x \end{vmatrix}_{n\times n}=F_1-F_2=\cdots$$

$$\cdots=(x-b)D_n+(x-a)\begin{vmatrix} 0 & a-x & 0 & \cdots 0 \\ b & x & a & \cdots a \\ b & b & x & \cdots a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ b & b & b & \cdots x \end{vmatrix}_{n\times n}=\cdots$$

$$\cdots=(x-b)D_3+(x-a)(x-a)\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots a \\ b & x & a & \cdots a \\ b & b & x & \cdots a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ b & b & b & \cdots x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=F_1-F_2=\cdots$$

$$\cdots=(x-b)D_n+(x-a)^2(x-a)^{n-1-2}\begin{vmatrix} 0 & a-x \\ b & x \end{vmatrix}_{2\times 2}=\cdots$$

$$\cdots=(x-b)D_n+(x-a)^{2+n-1-2+1}b=\cdots$$

$$D_{n+1}=(x-b)D_n+(x-a)^n b \qquad (1)$$

Trabajando por columnas, o haciendo el determinante de la matriz traspuesta

$$D_{n+1}=(x-a)D_n+(x-b)^n a \qquad (2)$$

$$0=[(x-b)-(x-a)]D_n+(x-a)^n b-(x-b)^n a \qquad (1)-(2)$$

$$0=(x-b-x+a)D_n+(x-a)^n b-(x-b)^n a$$

$$0=(a-b)D_n+(x-a)^n b-(x-b)^n a$$

$$(a-b)D_n=-[(x-a)^n b-(x-b)^n a]$$

$$(a-b)D_n=(x-b)^n a-(x-a)^n b$$

Y si no he cometido ya alguna fechoría

$$D_n=\frac{(x-b)^n a-(x-a)^n b}{a-b} \qquad a\neq b \;\; y\, me\, conformo$$

Si $a=b$, aplicamos recurrencia en (1) y obtenemos

$$D_{n+1}=(x-b)^n(x+nb)$$