2. Sean a y b dos números reales positivos.
a) Demostrar que si $a < b < e$ entones $a^b < b^a$.
b) Demostrar que si $e < a < b$ entonces $a^b > b^a$.

$a, b \in \mathbb{R}^{++}$ $\qquad \mathbb{R}^{++} = (0, +\infty)$

a) $a^b < b^a \overset{*}{\Longleftrightarrow} \ln a^b < \ln b^a \Longleftrightarrow b \ln a < a \ln b$

$\Longleftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} < \dfrac{\ln b}{b}$

$0 < a < b < e \Longrightarrow \dfrac{\ln a}{a} < \dfrac{\ln b}{b}$

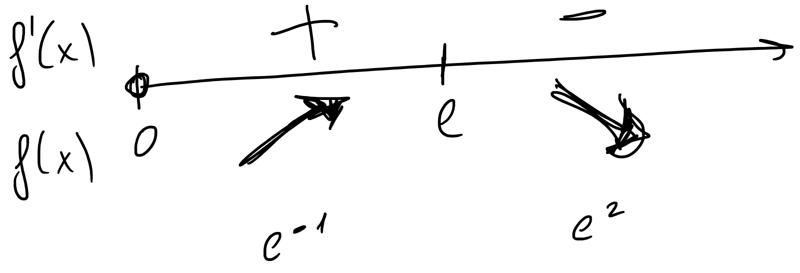
$\Longrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \Longleftarrow$

$$f'(x) = \frac{\cancel{1/x} \cdot \cancel{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \ln x = 0 \longrightarrow \ln x = 1$

$\Updownarrow$

$\boxed{x = e}$



f es creciente en $(0, e) \Longrightarrow$
$\forall a, b \in (0, e) \mid \boxed{a < b} \Longrightarrow f(a) < f(b) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \boxed{\dfrac{\ln a}{a} < \dfrac{\ln b}{b}}$

b) f es decreciente a $(e, +\infty) \Longrightarrow$
$\forall a, b \in (e, +\infty) \Longrightarrow \boxed{a < b} \Longrightarrow f(a) > f(b)$

$\dfrac{\ln a}{a} > \dfrac{\ln b}{b} \Longleftrightarrow$

$\boxed{a^b > b^a}$