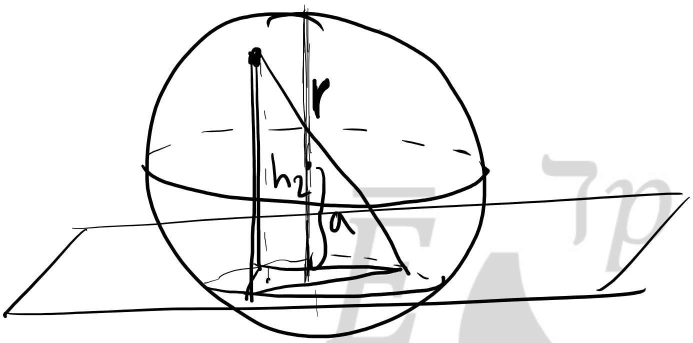
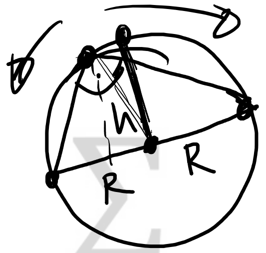
4. Sean $ABCD$ cuatro puntos en una esfera de radio $r$ tales que los puntos $ABC$ forman un triángulo rectángulo en el plano que los contiene.

(a) Determine el volumen del tetraedro $ABCD$ y estudie si $\frac{2}{3}r^3$ es una cota superior para este volumen. En su caso, determine, si existe, un tetraedro con volumen $\frac{2}{3}r^3$.

(b) Determine el volumen del tetraedro $A_1B_1C_1D$, donde $A_1$ es el punto medio del lado $AB$, $B_1$ es el punto medio del lado $BC$ y $C_1$ es el punto medio del lado $CA$, y su relación con el volumen del tetraedro $ABCD$.



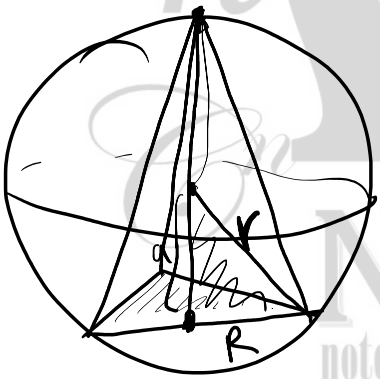



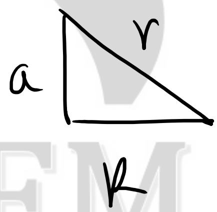

$$A = \frac{2R \cdot h_1}{2} = R \cdot h_1$$

$$\boxed{V = \frac{[R \cdot h_1] \cdot h_2}{3}}$$

$$A_{max} = R^2 = (r^2 - a^2)$$

$$h_{2max} = (r+a)$$




$$R = \sqrt{r^2 - a^2}$$

$$V_{max} = \frac{(r^2 - a^2)(r+a)}{3} =$$

$$= \frac{r^3 - a^2 r + r^2 a - a^3}{3}$$

$$\frac{dV_{max}}{da} = \frac{-2ar + r^2 - 3a^2}{3}$$

$$-3\frac{r^2}{4} - \frac{2r^2}{2} + r^2$$

$$-\frac{7}{4} + \frac{4}{4} < 0$$

$$-3a^2 - 2ra + r^2 = 0$$

$$a = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 + 12r^2}}{-6} = \frac{2r \pm 4r}{-6}$$

$-r$

$\frac{r}{3}$

$$V_{max} = \frac{\left[r^2 - \left(\frac{r}{3}\right)^2\right]\cdot\left[r + \frac{r}{3}\right]}{3} = \frac{\frac{8r^2}{9}\cdot\frac{4r}{3}}{3} =$$

$$\to \frac{32r^3}{81} < \frac{2}{3}r^3$$

$\frac{dV_{max}}{da}$ $\quad + \quad \frac{r}{3} \quad -$

$V_{max}$ $\quad \nearrow \quad \searrow$

max. relativo para $V_{max}$

$$\frac{3}{2}\cdot\boxed{\frac{32}{81}r^3 < \cancel{\frac{2}{3}}r^3}\cdot\cancel{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{16}{27} r^3 < 1 \cdot r^3$$

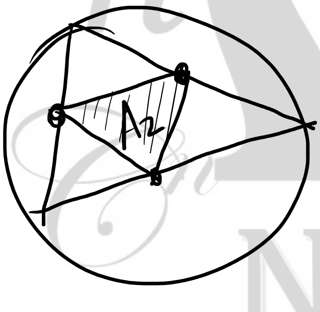
Sol: $\frac{2}{3} r^3$ es cota sup.

No existe un tetraedro con $V = \frac{2}{3} r^3$ ya que

$$V_{max} = \frac{32}{81} r^3 < \frac{2}{3} r^3$$

---

b




$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{4} A$$

$$V_{A_1 B_1 C_1 D} = \frac{1}{4} V_{ABCD}$$