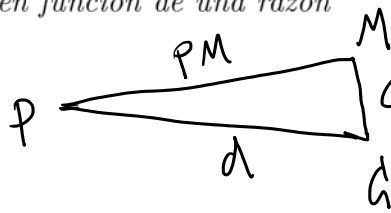
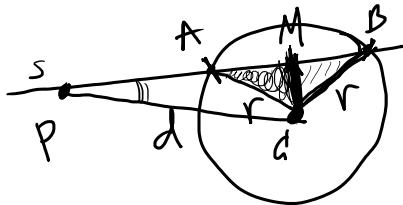


**Problema 1.** Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

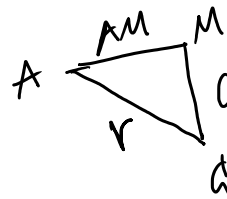
1. Sea  $C$  una circunferencia y  $P$  un punto del plano euclídeo exterior a la circunferencia. Sea  $s$  una recta que pasa por  $P$  y es secante con  $C$ . Si  $A$  y  $B$  son los puntos de corte de la circunferencia con  $s$ , demuestre que el producto  $PA \cdot PB$  no depende de la recta secante  $s$  elegida.
2. En un terreno llano se ha construido un estanque de planta circular en el que la superficie libre de agua enrasa con el terreno. El estanque está centrado en el punto  $C(43,31)$  y su radio es de 30 m. Un pato, situado inicialmente en el punto  $P(3,1)$ , marcha en línea recta y con velocidades uniformes de 0,32 m/s y 0,96 m/s, sobre tierra y nadando, respectivamente, con el fin de llegar a la orilla opuesta. Determine la dirección que debe tomar el pato para que la duración del recorrido sea la mínima posible y calcule el tiempo correspondiente.

NOTA. La dirección del pato debe ser expresada en función de una razón trigonométrica.

①



$$d^2 = CM^2 + PM^2 \rightarrow \boxed{PM^2 = d^2 - CM^2}$$



$$r^2 = CM^2 + AM^2 \rightarrow \boxed{AM^2 = r^2 - CM^2}$$

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= (PM - AM)(PM + MB) = (PM - AM)(PM + AM) = \\ &= PM^2 - AM^2 = d^2 - CM^2 - r^2 + CM^2 \\ &= \boxed{d^2 - r^2} \end{aligned}$$

②

$$C(43,31) \quad r = 30$$

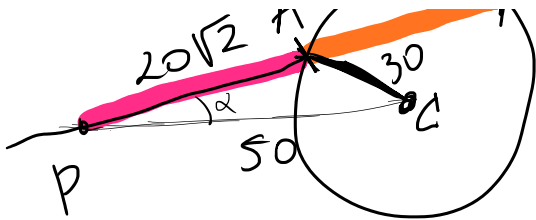
$$v_1 = 0,32$$

$$v_2 = 0,96$$

$$P(3,1)$$



$$\begin{aligned} \boxed{PA \cdot PB} &= 50^2 - 30^2 = \\ &= 2500 - 900 = \boxed{1600} \end{aligned}$$



$$PB = \frac{1600}{PA}$$

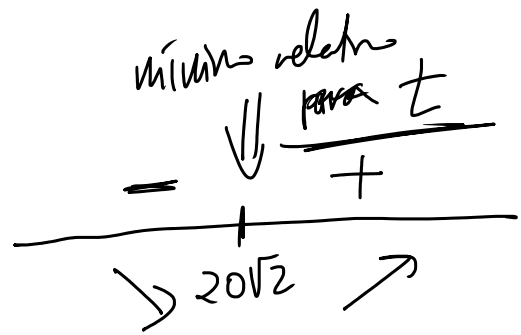
$$\vec{PC} = (40, 30) \rightarrow |\vec{PC}| = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50$$

$$L = \frac{PA}{0'32} + \frac{AB}{0'96} = \frac{PA}{0'32} + \frac{PB - PA}{0'96} = \frac{3PA + PB - PA}{0'96} = \frac{2PA + PB}{0'96}$$

1 → 0'32  
? → PA

$$L = \frac{1}{0'96} \left( 2PA + \frac{1600}{PA} \right)$$

$$L' = \frac{1}{0'96} \left( 2 - \frac{1600}{PA^2} \right)$$



$$L' = 0 \iff 2 - \frac{1600}{PA^2} = 0 \rightarrow 2 = \frac{1600}{PA^2}$$

$$PA^2 = 800$$

$$PA = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$$

$$PA = 20\sqrt{2} \text{ m}$$

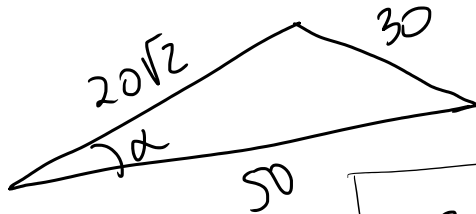
$$PB = \frac{1600}{20\sqrt{2}} = \frac{80\sqrt{2}}{2} = 40\sqrt{2}$$

$$AB = PB - PA = 20\sqrt{2} \text{ m}$$

$$L = \frac{2PA + PB}{0'96} = \frac{2(20\sqrt{2}) + 40\sqrt{2}}{0'96} = \frac{80\sqrt{2}}{0'96} = \frac{250\sqrt{2}}{3} \approx 118,85 \text{ seg.}$$

$$L = \frac{80\sqrt{2}}{0.96} = \frac{250\sqrt{2}}{3} \approx 117.85 \text{ seg.}$$

117.85 seg



$$30^2 = 50^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 50 \cdot (20\sqrt{2}) \cos \alpha$$

$$900 = 2500 + 800 - 2000\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\frac{900 - 2500 - 800}{-2000\sqrt{2}} = \cos \alpha$$

$$\frac{-2400\sqrt{2}}{-4000} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\alpha \approx 31.95^\circ$$

$$\alpha = \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

